

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΟΡΙΣΜΟΙ (τι ονομάζεται;)

1. Τι ονομάζεται **κλασματική μονάδα**;

Το σύμβολο $\frac{1}{n}$ (n φυσικός $\neq 0$) που εκφράζει το ένα από τα n ίσα μέρη,
στα οποία χωρίζεται μια ποσότητα.

2. Τι ονομάζεται **κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός**; Τι **εκφράζει**; Τι **παριστάνει**;

Κλάσμα ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{k}{n}$, όπου k, n φυσικοί με $n \neq 0$.

Οι αριθμοί k, n λέγονται όροι του κλάσματος, το k αριθμητής και το n παρονομαστής.

Το κλάσμα $\frac{k}{n}$ εκφράζει τα k μέρη από τα n ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μια ποσότητα.

Γενικά $\frac{k}{n} = k \cdot \frac{1}{n}$ όπου k, n φυσικοί με $n \neq 0$.

Το κλάσμα $\frac{k}{n}$ παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή.

Γενικά $\frac{k}{n} = k : n$ όπου k, n φυσικοί με $n \neq 0$.

Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή.

πχ. το κλάσμα $\frac{3}{4}$ εκφράζει τα 3 από τα 4 ίσα μέρη που χωρίζουμε μια ποσότητα

και παριστάνει την διαίρεση $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$

3. Πότε δυο κλάσματα λέγονται **ίσα** ή **ισοδύναμα**; Πως συμβολίζονται;

Όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.
Συμβολίζονται με το σύμβολο της ισότητας ανάμεσά τους.

Πχ. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ διότι όταν χωρίσω μια ποσότητα σε 2 ίσα μέρη και διαλέξω το 1,

είναι σαν να έχω χωρίσει την ίδια ποσότητα σε 4 ίσα μέρη και να διαλέξω τα 2.

4. Τι ονομάζεται **απλοποίηση** ενός κλάσματος;

Η διαδικασία κατά την οποία δημιουργούμε ένα κλάσμα ίσο με το αρχικό αλλά με μικρότερους όρους.
Η απλοποίηση σταματάει όταν ο ΚΜΔ του αριθμητή και παρονομαστή είναι το 1.

$$\text{πχ. } \frac{30}{50} = \frac{30:2}{50:2} = \frac{15}{25} = \frac{15:5}{25:5} = \frac{3}{5}$$

ή πιο σύντομα $\frac{30}{50} = \frac{30:10}{50:10} = \frac{3}{5}$, ΜΚΔ(3,5)=1 άρα σταματάει.

5. Ποιο κλάσμα λέγεται **ανάγωγο**;

Αυτό που δεν μπορεί να απλοποιηθεί,

δηλ. δεν υπάρχει κανένας κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή του εκτός από το 1
πιο απλά, όταν ο ΜΚΔ του αριθμητή και του παρονομαστή του είναι 1.

6. Πότε δυο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται **ομώνυμα** και πότε **ετερόνυμα**;

Ομώνυμα λέγονται όταν έχουν τον ίδιο παρονομαστή και ετερόνυμα όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

7. Ποιος αριθμός λέγεται **μεικτός**;

Ο αριθμός που συμβολίζεται σαν $\kappa \frac{\lambda}{\nu}$, και παριστάνει το άθροισμα ενός ακεραίου κ

με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας $\frac{\lambda}{\nu}$, δηλ. $\kappa \frac{\lambda}{\nu} = \kappa + \frac{\lambda}{\nu}$

8. Πότε δυο κλάσματα λέγονται **αντίστροφα**;

Όταν έχουν γινόμενο 1.

πχ. τα κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ είναι αντίστροφα διότι $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

πχ. τα κλάσματα $7, \frac{1}{7}$ είναι αντίστροφα διότι $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$

9. Πότε ένα κλάσμα λέγεται **σύνθετο**;

Όταν ένας τουλάχιστον όρος του, είναι κλάσμα δηλαδή έχει ή στον αριθμητή ή στον παρονομαστή ή και σε αριθμητή και σε παρονομαστή σαν όρο άλλο κλάσμα.

ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΕΣ

10. Ποιος αριθμός απαγορεύεται να μπει παρονομαστής;

Με το 0. Είναι το χειρότερο λάθος στα Μαθηματικά.

11. Ποιο κλάσμα δεν έχει αντίστροφο και γιατί;

Ο αριθμός 0, γιατί απαγορεύεται να διαιρέσουμε με 0.

12. Ποιο κλάσμα έχει αντίστροφο τον εαυτό του;

Ο αριθμός 1, γιατί $1 \cdot 1 = 1$

13. Σε ποιες πράξεις κλασμάτων κάνω ομώνυμα;

Ομώνυμα κάνουμε **μόνο** σε πρόσθεση και αφαίρεση.

ΚΑΝΟΝΕΣ (πώς;)

14. Πως μπορώ να γράψω έναν **φυσικό** σαν **κλάσμα**;

Γράφοντας τον σαν κλάσμα με αριθμητή τον ίδιο και παρονομαστή την μονάδα, δηλ $\kappa = \frac{\kappa}{1}$.

15. Πως **συγκρίνω** ένα κλάσμα με την **μονάδα**;

Αν ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας.

Αν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ίσο με την μονάδα.

Αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας.

πχ. $\frac{2}{3} < 1$ διότι $2 < 3$, $\frac{3}{3} = 1$ διότι $3 = 3$, $\frac{7}{3} > 1$ διότι $7 > 3$.

16. Πως **ελέγχω** αν 2 κλάσματα είναι **ισοδύναμα** ;

Δυο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα όταν τα "χιαστί" γινόμενα $\alpha\delta, \beta\gamma$ είναι ίσα.

$$\text{πχ. } \frac{4}{60} = \frac{2}{30} \text{ διότι } 4 \cdot 30 = 60 \cdot 2, \quad \frac{4}{60} \neq \frac{3}{30} \text{ διότι } 3 \cdot 30 \neq 60 \cdot 2 \text{ αφού } 90 \neq 120$$

17. Πως **κατασκευάζω** κλάσματα **ισοδύναμα** με ένα κλάσμα;

Είτε πολλαπλασιάζω τους όρους του με τον ίδιο μη μηδενικό φυσικό αριθμό, δηλ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \nu}{\beta \cdot \nu}$

είτε διαιρώ τους όρους του με τον ίδιο μη μηδενικό φυσικό αριθμό, δηλ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \nu}{\beta : \nu}$.

18. Πως **απλοποιώ** ένα κλάσμα;

Βρίσκω τον ΜΚΔ των όρων του.

Αν $\text{ΜΚΔ} \neq 1$, διαιρώ τους όρους του με τον ΜΚΔ τους.

Αν $\text{ΜΚΔ}=1$, τότε το κλάσμα είναι ανάγωγο (δεν απλοποιείται).

$$\text{πχ. } \frac{77}{21}, \text{ΜΚΔ}(77, 21) = 7, \text{αρα } \frac{77}{21} = \frac{77:7}{21:7} = \frac{11}{3}, \quad \frac{16}{25}, \text{ΜΚΔ}(16, 25) = 1, \text{αρα } \frac{16}{25} \text{ ανάγωγο}$$

19. Πως **μετατρέπω** ένα **μεικτό** κλάσμα σε **απλό**;

Το αποτέλεσμα είναι ένα κλάσμα με αριθμητή το αριθμό που προκύπτει από το άθροισμα του γινόμενου του ακεραίου επί τον παρονομαστή και του αριθμητή, και με παρονομαστή τον ίδιο παρονομαστή.

$$\text{πχ. } 2\frac{1}{7} \left(= \frac{2 \cdot 7 + 1}{7} = \frac{14 + 1}{7} \right) = \frac{15}{7}, \quad 5\frac{3}{4} \left(= \frac{5 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{20 + 3}{4} \right) = \frac{23}{4}$$

20. Πως **μετατρέπω** ένα **απλό** κλάσμα (μεγαλύτερο της μονάδας) σε **μεικτό**;

Κάνω την Ευκλείδεια διαίρεση αριθμητή δια παρονομαστή

$$(\Delta : \delta \text{ με } \Delta = \delta\pi + \upsilon) \text{ και μετά } \frac{\Delta}{\delta} = \pi \frac{\upsilon}{\delta}$$

$$\text{πχ. } \frac{30}{7}, 30 = 4 \cdot 7 + 2 \Rightarrow \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}, \quad \frac{17}{3}, 17 = 3 \cdot 5 + 2 \Rightarrow \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

21. Πως **μετατρέπω** δυο ή περισσότερα **ετερόνυμα** κλάσματα σε **ομώνυμα**;

- (Ελέγχω αν απλοποιούνται, μόνο και μόνο για να μικρύνουν οι όροι. Αφού γίνουν ανάγωγα:)
- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών τους.
- Διαιρούμε με ΕΚΠ καθέναν από τους παρονομαστές και ο,τι βρούμε το βάζουμε στα καπελάκια.

Διαφορετικά:

Σε κάθε καπελάκι βάζουμε τον αριθμό που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον παρονομαστή του κλάσματος ώστε να γίνει ο παρονομαστής ίσος με το ΕΚΠ.

- Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με τον αριθμό στο καπελάκι.
- (Έλεγχος: Αν οι παρονομαστές δεν έγιναν ίδιοι στο τέλος (και ίσοι με το ΕΚΠ), τότε κάναμε λάθος είτε στο ΕΚΠ. είτε στον αριθμό στο καπελάκι.)

δηλ. (απλοποίηση $\rightarrow$) ΕΚΠ $\rightarrow$ αριθμός στο Καπελάκι $\rightarrow \otimes$ τα πάντα με αριθμό σε καπελάκι $\rightarrow$ ομώνυμα

22. Πως **συγκρίνω** δυο ή περισσότερα κλάσματα;

Αν είναι ομώνυμα, μικρότερο είναι εκείνο με τον μικρότερο αριθμητή.

Αν είναι ετερόνυμα, πρώτα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα, και τα συγκρίνουμε σαν ομώνυμα.

Αν έχουν τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

$$\text{πχ.} \quad \frac{2}{7} < \frac{3}{7} \text{ διότι } 2 < 3, \quad \frac{5}{3} > \frac{5}{4} \text{ διότι } 3 < 4,$$

$$\frac{4}{5} \dots \frac{5}{6}, \frac{4}{5} \left(= \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6} \right) = \frac{24}{30}, \frac{5}{6} \left(= \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 6} \right) = \frac{25}{30}, \frac{24}{30} < \frac{25}{30} \text{ αρα } \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$$

23. Πως **προσθέτω** ή **αφαιρώ** δυο ή περισσότερα κλάσματα;

Αν είναι ομώνυμα, προσθέτω ή αφαιρώ τους αριθμητές τους, αφήνοντας ίδιο τον παρονομαστή.

Αν είναι ετερόνυμα, πρώτα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα, και συνεχίζουμε σαν ομώνυμα.

$$\begin{aligned} \text{πχ.} \quad \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 2 + 5\frac{1}{4} &= \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 2 + \frac{21}{4} \left(\text{ΜΚΔ}=12 \right) = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 12}{1 \cdot 12} + \frac{21 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \left(\right) \\ &= \frac{8}{12} + \frac{10}{12} - \frac{24}{12} + \frac{63}{12} = \frac{8+10+63-24}{12} = \frac{81-24}{12} = \frac{57}{12} \left(\text{ΜΚΔ}=3 \right) = \frac{57:3}{12:3} = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

24. Πως **πολλαπλασιάζω** δυο ή περισσότερα κλάσματα;

Το αποτέλεσμα είναι ένα νέο κλάσμα με αριθμητή

το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\text{πχ.} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \left(= \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} \right) = \frac{10}{21}, \quad 2 \cdot \frac{5}{7} \left(= \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 7} \right) = \frac{10}{7}$$

25. Πως **υπολογίζω δύναμη** κλάσματος;

Πολλαπλασιάζω το κλάσμα με τον εαυτό του τόσες φορές όσες ο εκθέτης.

$$\text{πχ.} \quad \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$$

26. Πως **βρίσκω** τον **αντίστροφο** ενός κλάσματος;

Εναλλάσσω αριθμητή με παρονομαστή, δηλ. το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ έχει αντίστροφο το $\frac{\beta}{\alpha}$

και το κλάσμα $\nu = \frac{\nu}{1}$ έχει αντίστροφο το $\frac{1}{\nu}$ όταν $\nu \neq 0$.

27. Πως **διαιρώ** δυο κλάσματα;

Πολλαπλασιάζω τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\text{πχ.} \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} \left(= \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} \right) = \frac{14}{15}, \quad 2 : \frac{5}{7} = \frac{2}{1} \cdot \frac{7}{5} \left(= \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 5} \right) = \frac{14}{5}, \quad \frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} : \frac{5}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \left(= \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} \right) = \frac{2}{15}$$

28. Πως **μετατρέπω** ένα **σύνθετο** κλάσμα σε **απλό**;

Το αποτέλεσμα είναι ένα νέο κλάσμα με αριθμητή

το γινόμενο των άκρων όρων και παρονομαστή το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{πχ.} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}, \quad \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 1} = \frac{14}{5}, \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{1}} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$