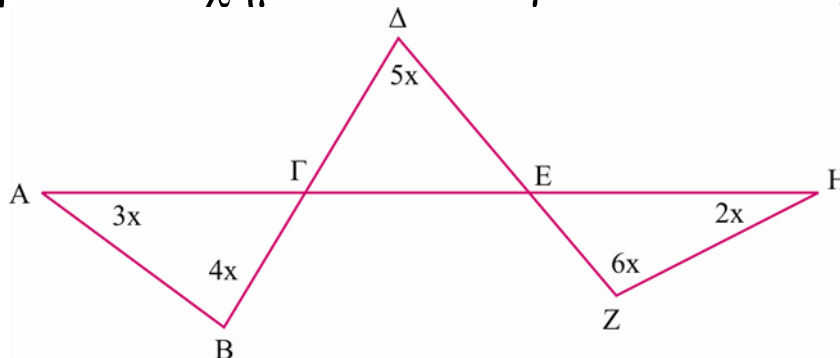




ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ' τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και $\alpha\beta\gamma=10$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right)^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $27p + 1$ είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2} \alpha \beta^{-1} + \frac{10}{3} \alpha^{-1} \beta = 3.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007
Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

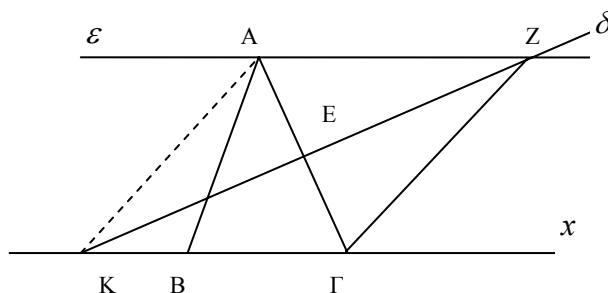
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $A > B$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$.



(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Z\hat{\Gamma}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι $KA = AZ$.

Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $A = aaabb$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

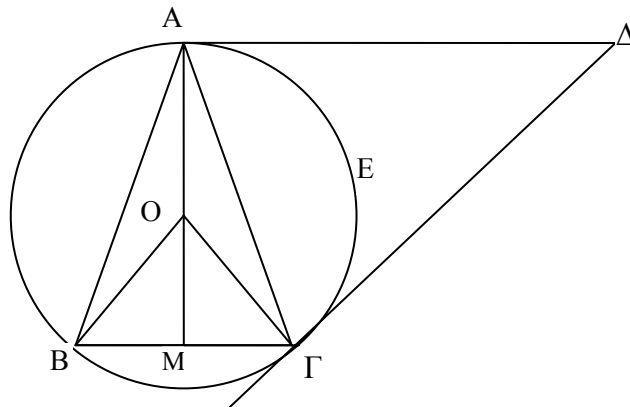
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Η $A\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη προς την $Ο\Gamma$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $ΟΑΕ\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = a$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = a$.

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{[1 - (-1)^{2009}]^0}$, $B = \frac{[(-2)^2 + (-1)^2]^2}{5} + \frac{x}{2}$.

Αν είναι $A = B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x .

Μονάδες 5

2. Το σημείο $A(-\lambda + 2, 4\lambda - 1)$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy . Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ ,

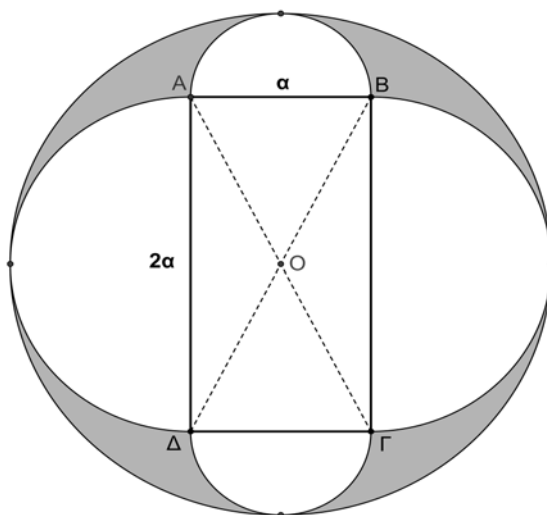
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OA και

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $OBA\Gamma$, όπου B, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο A στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy , αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \alpha$, $A\Delta = 2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής O των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Μονάδες 5



4. Αν ισχύει $\frac{45^v \cdot 2^{2v}}{6^v} = 900$, όπου v θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^v - (-1)^{v+1} + 4 \cdot (-1)^{v+2}.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν v είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4 \cdot (-1)^v + 2 \cdot \frac{(-1)^{2v+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3v}}{5}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,6)$.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων Οxy, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2 , και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3 . Αν είναι

$r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$, όπου $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$ είναι τα

εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Γυμνασίου

1. Αν $x + y = 3 \cdot (-2)^2$ και $y - w = \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 7x + 10y - 3w - 87.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Στο εσωτερικό της γωνίας A φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα. Αν $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$, $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$ και το ύψος AH έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

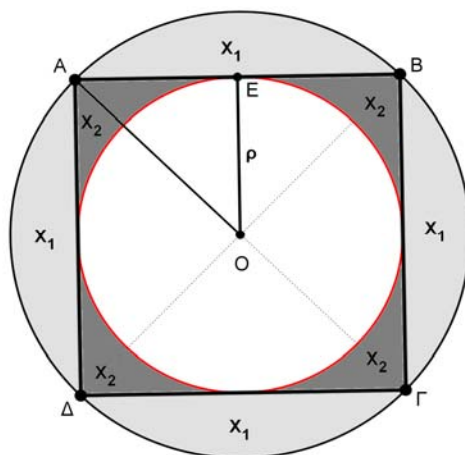
4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά 2ρ . Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(O, OA)$ που ορίζονται από τις χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA . Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(O, \rho, OA)$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(O, \rho)$ και $C(O, OA)$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2 , αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$

μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O, x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O, \rho, OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $K(2, 8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4, -4)$ και $M(-1, 2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος KL .

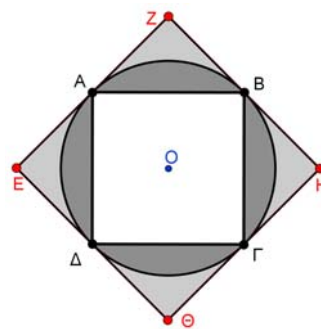
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(O, \rho)$ στα σημεία A, B, Γ και Δ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου $EZH\Theta$ και εξωτερικά του κύκλου $C(O, \rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3,1415$).



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6},$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2

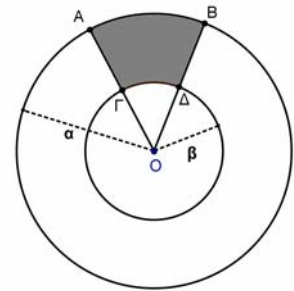
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν E του χωρίου $AB\Delta\Gamma$ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O, α) και (O, β) , $0 < \beta < \alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = \hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3.$$



Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = \alpha$ cm και $AB < A\Delta$. Η κάθετη από την κορυφή B προς τη διαγώνιο $A\Gamma$ την τέμνει στο σημείο E . Αν ισχύει ότι $E\Gamma = 2 \cdot AE$, να βρείτε:

- (i) το μήκος της πλευράς AB .
- (ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4, 6) - 2 \cdot (\alpha - 0, 2).$$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi' \chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi' \chi$ και στην ευθεία (ε) , ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi' \psi$ και στην ευθεία (ε) .

(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

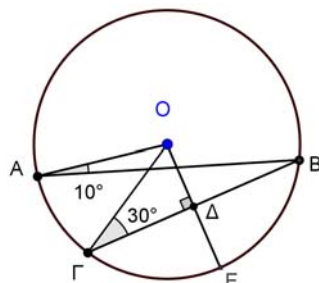
(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM .

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο $c(O, R)$ (κέντρου O και ακτίνας R) δίνονται σημεία A , Γ και B τέτοια ώστε $\widehat{OAB} = 10^\circ$ και $\widehat{O\Gamma B} = 30^\circ$. Τα σημεία A και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία OB . Από το σημείο O φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓB που την τέμνει στο σημείο Δ , ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο E .

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $OB\Gamma E$ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.
Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$, αν $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \frac{28}{\nu}$ και $\gamma = \frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο Z . Η κάθετη από το σημείο B προς την πλευρά $A\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο K , το ευθύγραμμο τμήμα ΔZ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα AZ στο σημείο M . Αν είναι $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = 36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

- (α) $\omega = 36^\circ$,
- (β) $AM = \Gamma Z$,
- (γ) $B\Lambda = \Lambda Z$.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = (x + y) \cdot z^m - w$.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



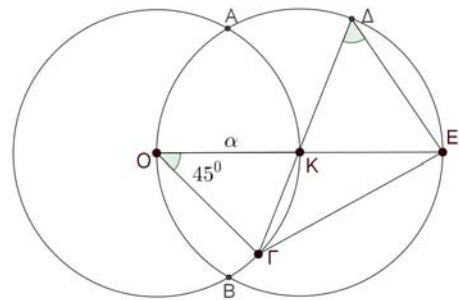
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Αν $\alpha = \frac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$.

Πρόβλημα 2.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία O και K , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο KB και η ευθεία GK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο Δ . Η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο E . Αν είναι $\angle OK\Gamma = 45^\circ$, να βρείτε :



- (α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\angle K\Delta E$, και
(β) το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma E$ συναρτήσει του α .

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d , ισχύει ότι: $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$.

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}, \frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να

βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a, b, c, d .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός N είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^{2N+1}}{2^{2N+1}} + \frac{(-15)^{2N-1}}{(-3)^{2N-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2N}}{2^{2N}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2N} + 2018.$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80 τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Πρόβλημα 3

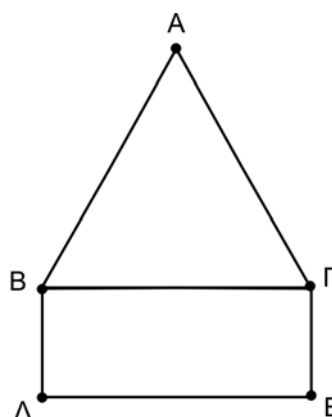
Γράφουμε θετικό ακέραιο A χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο A που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς α . Το σχήμα $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά $B\Delta = \frac{\alpha}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = A\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200.$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: Ο μέσος όρος n αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ο αριθμός $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α , για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Πρόβλημα 4

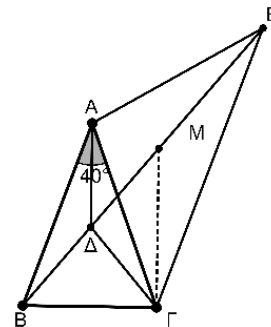
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB=AG$) με $\widehat{A} = 40^\circ$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: $\Delta A = \Delta B = \Delta \Gamma$. Αν η ΓM είναι παράλληλη στην $A\Delta$ και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$), να αποδείξετε ότι:

(α) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

(β) $\widehat{\Gamma A E} = 100^\circ$.

(γ) η AM είναι κάθετη στην ΓE .

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9} + \frac{(-16)^9}{(-2)^9} \right) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot \left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}} - \left(-\frac{1}{5} \right)^{-10} + 100 \right).$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιχνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019}, \frac{2021}{2020}, \frac{2022}{2021}, \frac{3020}{3019}, \frac{3021}{3020}, \frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022}, \frac{4022}{4023}, \frac{5020}{5021}, \frac{5021}{5022}, \frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Πρόβλημα 4

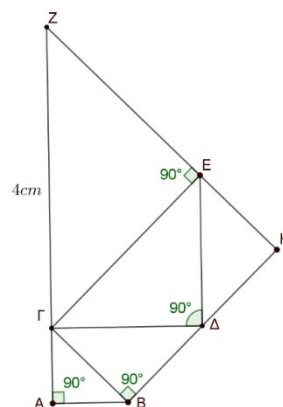
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$, $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$, $\widehat{E\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\widehat{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $AB = A\Gamma$, $B\Gamma = B\Delta$, $\Delta\Gamma = \Delta E$, $E\Gamma = EZ$ και $\Gamma Z = 4 \text{ cm}$.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
6 Νοεμβρίου 2020

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

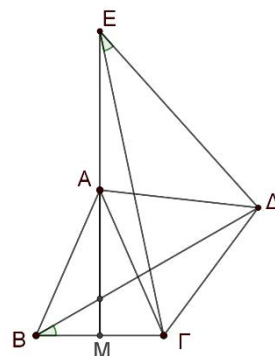
$$A = \left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}} + \frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}} + 20^0 \right) \cdot \left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}} + \frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}} + 2021 \right).$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma > B\Gamma$.
 Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε ισόπλευρο
 τρίγωνο $A\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM του
 τριγώνου $AB\Gamma$ προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = AB$.
 Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{DB\Gamma} = \widehat{GE\Delta} = 30^\circ.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας
 σχήμα)



Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Σε μία παρέα κάποια μέλη της αποτελούν την ομάδα M που αγαπάει τα Μαθηματικά,
 ενώ τα υπόλοιπα μέλη αποτελούν την ομάδα Φ που αγαπάει τη Φυσική. Ο μέσος όρος
 των ηλικιών των μελών που αγαπούν τα Μαθηματικά είναι 25 χρόνια, ενώ αυτών που
 αγαπούν τη Φυσική είναι 35 χρόνια. Όμως δύο μέλη της ομάδας Φ δήλωσαν ότι πλέον
 άλλαξαν προτίμηση και ζήτησαν να ενταχθούν στην ομάδα M . Τότε ο μέσος όρος των
 ηλικιών της ομάδας M έγινε 27, ενώ ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Φ έγινε 37.
 Να βρείτε πόσα μέλη είχε συνολικά η παρέα και να δώσετε ένα παράδειγμα μιας
 τέτοιας παρέας.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

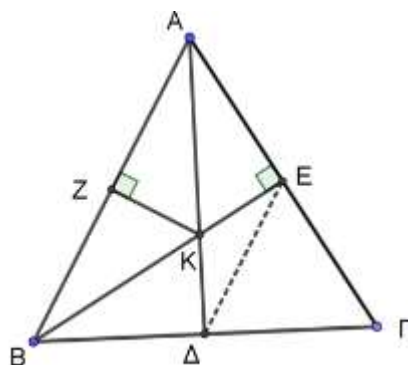
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$, το ύψος BE και η μεσοκάθετη ZK της πλευράς AB περνούν από το ίδιο σημείο K .

(α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ED είναι παράλληλη προς την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι

$$KD = KE = KZ.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Μία σχολική τάξη έχει συνολικά A μαθητές. Μία μαθήτριά, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να

βάλει γραμματόσημο σε $\frac{A}{4}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις

υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\frac{1}{10}$ έφτασε εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του A ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
(συμπληρωματικός διαγωνισμός)
14 Μαΐου 2021
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακεραίου 4654650 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 4654650 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε το δέκατο στη σειρά διαιρέτη.

Μονάδες 6

Πρόβλημα 2/μ

(α) Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός y έτσι ώστε η διαφορά $x - y$ να ισούται με το γινόμενο xy .

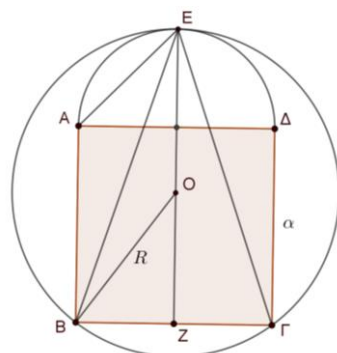
(β) Αν οι x, y ικανοποιούν η εξίσωση $x^2 + y^2 = 2$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{y(x^2 + 2)}{x(y + 1)}.$$

Μονάδες 7

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς a . Το ημικύκλιο ΑΕΔ έχει διάμετρο την πλευρά ΑΔ του τετραγώνου και ο κύκλος γ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα $OB = OG = R$ εφάπτεται εσωτερικά με το ημικύκλιο στο σημείο Ε που είναι το μέσο του ημικυκλίου. Δίνεται ακόμη ότι η ΕΖ είναι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.



Να εκφράσετε το μήκος της ακτίνας R του κύκλου γ ως συνάρτηση της πλευράς a και να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ, ως συνάρτηση του a .

Μονάδες 7

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right)$$

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

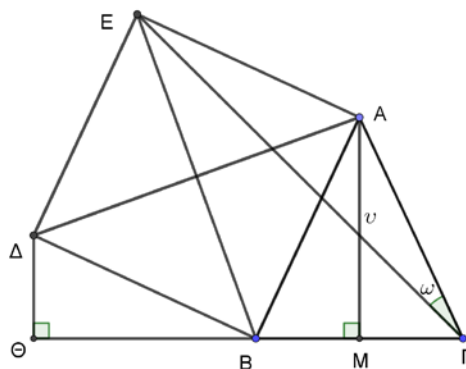
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = ΑΓ και το τετράπλευρο ABΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\widehat{A\Gamma E} = \omega$, $\widehat{\Delta\Theta B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{M}B}$ και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \nu$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας ΕΓΒ.

(2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και ν .

Σημείωση. Να κάνετε στο γραπτό σας το δικό σας σχήμα



Μονάδες 7

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή πληθυσμού ήταν Α κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός Α, όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"/συμπληρωματικός
12 Νοεμβρίου 2022
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-32)^7}{16^7} - \frac{(-44)^7}{(-22)^7} + 2 \right) \cdot (-2022)^0 + 2020 \right) : \left(\frac{3^{-8}}{(-15)^{-8}} - (-5)^8 + 1 \right)$$

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Επίσης, Ε είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και ισχύει ότι $AD = AE$. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ.

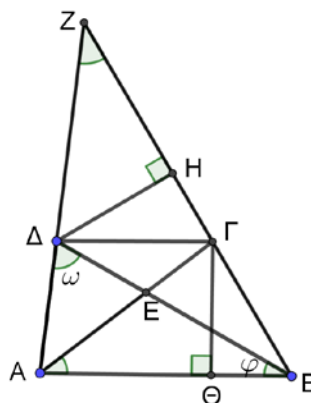
Επίσης, είναι:

$$\angle \hat{A}B = \omega, \angle \hat{B}\Delta = \varphi, \Gamma\Theta \perp AB \text{ και } \Delta H \perp \Gamma Z.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \angle \hat{Z}H = \angle \hat{A}\Theta$$

$$(\beta) \Delta H = \Gamma\Theta.$$

**Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)**Οι ακέραιοι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και τέτοιοι ώστε:

$$(5 - \alpha)(5 - \beta)(5 - \gamma)(5 - \delta) = 16.$$

Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αθροίσματος: $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.**Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες****Καλή επιτυχία!**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
4 Νοεμβρίου 2023
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η αριθμητική παράσταση

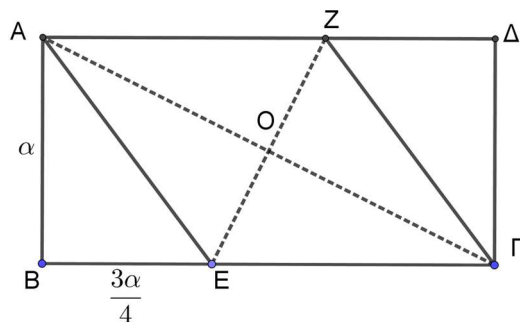
$$A = \left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5} \right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300}$$

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης A ως δύναμη με βάση το 2.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $A = \overline{2023xy}$, όπου x, y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Να προσδιορίσετε τα ψηφία x, y έτσι ώστε ο αριθμός A να διαιρείται με τον αριθμό 17.

Πρόβλημα 3. Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενο τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός από τους 7 δεδομένους που διαιρείται με το 10.



Πρόβλημα 4. Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο με $AB = \alpha$, $B\Gamma = 2\alpha$. Οι ευθείες AE και ΓZ είναι παράλληλες και $BE = \frac{3\alpha}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $AE = AZ$.

(β) Η διαγώνιος BD του ορθογωνίου ABΓΔ περνάει από το O που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων AG και ZE.

(γ) $AG = 2 \cdot EZ$.

Σημείωση: Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να λυθεί η εξίσωση $x + 2x + 3x + \dots + 100x = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101$.
2. Ποιο από τα κλάσματα

$$K = \frac{33333333331}{33333333334}$$

και

$$\lambda = \frac{22222222221}{22222222223}$$

είναι μεγαλύτερο και γιατί;

3. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, όπου $A\Delta = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $AB = \alpha + \beta$ και η πλευρά AB είναι κάθετος προς τις πλευρές $B\Gamma$ και $A\Delta$. Να υπολογισθεί η απόσταση της κορυφής A από το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ συναρτήσει των α και β .
4. Αν οι αριθμοί α , β , γ , δ και ε είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha) = (\alpha + \gamma)(\gamma + \varepsilon)(\varepsilon + \beta)(\beta + \delta)(\delta + \alpha);$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $A = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο A και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.
2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς X, Y, Z που είναι τέτοιοι ώστε:
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$
3. Έστω M σημείο της βάσης $B\Gamma$ ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB=6$. Αν είναι $MK \perp AB$, $ML \perp A\Gamma$ και $K_1\Lambda_1$ είναι η προβολή του $K\Lambda$ στη $B\Gamma$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $KK_1\Lambda_1\Lambda$.
4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $12b + 26a = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5}{12} - (24b + 52a)^{-2} - (72b + 156a)^{-1}.$$

Πρόβλημα 2

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Πρόβλημα 3

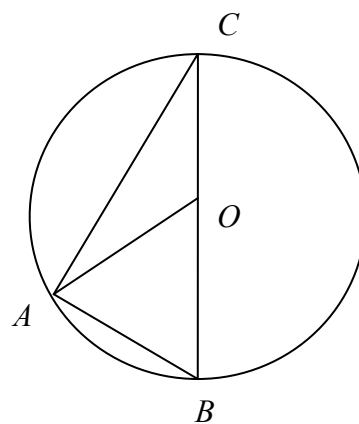
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον $AB = 2\sqrt{7}$ και $AC = 6$.

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC .

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC , να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$



Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $A = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a > 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος B που είναι μικρότερος από τον A κατά 396. Επιπλέον, αν από τον A αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του A . Να προσδιορίσετε τον αριθμό A .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a + 2b = \frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x + 2y}{x - 2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο K , έτσι ώστε να είναι $AK > KB$. Έστω M το συμμετρικό του B , ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο K . Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$A = \left[(-1)^{\nu} + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu} \right] \cdot \nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο A είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

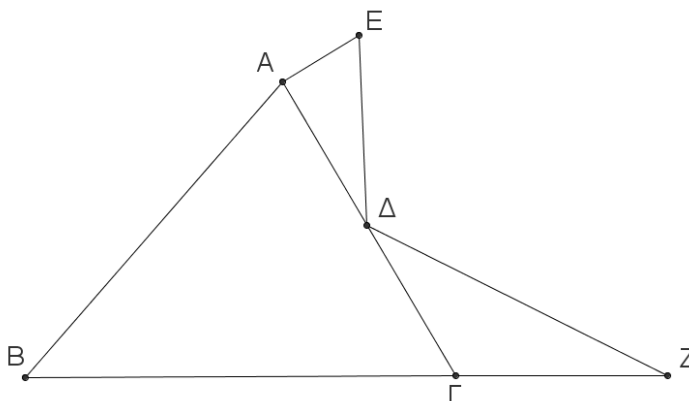
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ = \beta$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, $\hat{\Delta}ΑΕ = 90^\circ$, η ευθεία $ΔΕ$ είναι κάθετη προς την ευθεία $ΒΓ$, $\hat{\Delta}ΑΕ = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}Ζ = \theta$ και $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}Ζ = 30^\circ$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ .

Μονάδες 1

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος EZ συναρτήσει του β .

Μονάδες 4



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4} - \frac{7-3x}{8} = 1.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{3\beta} \right)^{-3} - 9\beta^2 - 20,$$

$$\text{για } \beta = -\frac{1}{3}.$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Οι ακέραιοι α, β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha \leq 10, \beta \geq 12 \text{ και } (\alpha - 12) \cdot (40 - 2\beta) \leq 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη της παράστασης $A = 3\alpha - 2\beta$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και E έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 1

(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.

Μονάδες 2

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΒΓΔΕ και εσωτερικά του κύκλου C .

Μονάδες 2

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 198$, όπου $B = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$.

(ii) Η εξίσωση $\frac{x + \alpha - 2\gamma}{2\alpha - \gamma} - \frac{\alpha - 2\gamma}{x} = 1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 9.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2} \right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.

Μονάδες 2

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η

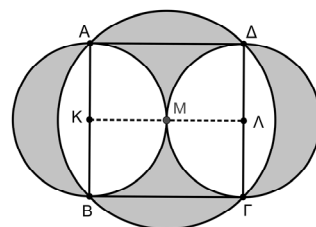
παράσταση $K = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \leq 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να υπολογιστεί συναρτήσει του R , το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y}, \text{ όταν } x = 3^{-2}, y = 3^{-3}.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $B = 16^{23} \cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $AE = AD$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $AZ = EG$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α .

(iii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές a, b, c, d, e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1) = 21$, να βρείτε τις τιμές των a, b, c, d, e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{x}{y} \right)^3, \quad B = \frac{243x^2 + 81y^2}{y} \quad \text{και} \quad \Gamma = x^{-1} + y^{-1}, \quad \text{όταν} \quad x = 3^{-3}, \quad y = 3^{-4}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 16x^6 - 16x^4 - x^2 + 1$ και $Q(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2 + 1)$.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω .

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο της K , την AB στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο M . Αν είναι $A\Delta = \alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α :

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AM και το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

17 Ιανουαρίου 2015

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = P(2x) - 19P(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{a}{b}$.

Πρόβλημα 3

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον M της $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο $B\Delta$ (το Δ είναι σημείο της $A\Gamma$) στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N . Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $K\Delta$.

1. Να αποδείξετε ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.

2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα BN , ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία A, Λ και M . Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις $M\Gamma$, $A\Gamma$ και το τόξο $\widehat{AM}$ του κύκλου ω . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$.

Σημείωση: Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου ω .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)}.$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

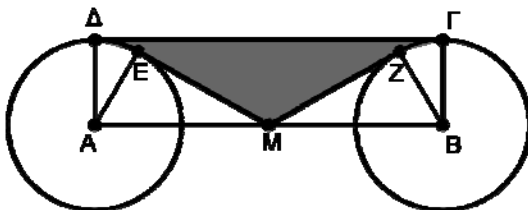
(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$ ισούται με τον κύβο ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $ΑΔ = α$ και $ΑΒ = 4α$. Με κέντρα τα σημεία Α, Β και ακτίνα $α$ γράφουμε κύκλους. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{ΔΑΕ}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ, τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ, το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ.



Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες.

Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

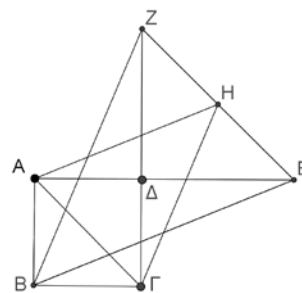
$$A = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}, \beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^3, \gamma = -\frac{27}{16}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΒΔ. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:

- (α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.
- (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.
- (γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.

Σημείωση: Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.



Πρόβλημα 3

- (α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .
- (β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, διαπιστώνει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma = -\frac{18}{2^3}$, $\delta = \frac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ίδιας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{P(x) - P(y)}{x - y}$$
 είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 72^\circ$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και E το συμμετρικό του A ως προς την $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓE περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Σημείωση: Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta = (-2)^{-2}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.

(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

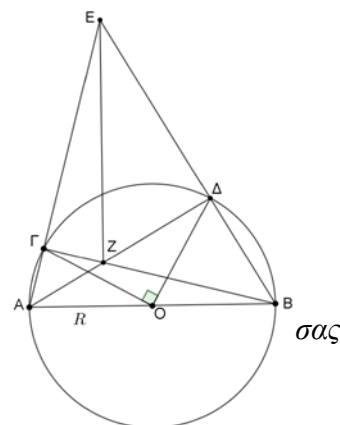
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $AB = 2R$ και η γωνία $\widehat{Γ\hat{O}\Delta} = 90^\circ$. Οι ευθείες $ΑΔ$ και $ΒΓ$ τέμνονται στο σημείο Z , ενώ οι ευθείες $ΑΓ$ και $ΒΔ$ τέμνονται στο σημείο E .

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\widehat{Γ\hat{A}\Delta}$ και $\widehat{Γ\hat{B}\Delta}$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $EZ = 2R$.

Σημείωση: Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.



Πρόβλημα 4

Έχουμε πέντε κάρτες A, B, Γ, Δ, E που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + 9 = (\beta - 3)^2 \quad \text{και} \quad \beta + 9 = (\alpha - 3)^2,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + \beta^2$.

Πρόβλημα 2

Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

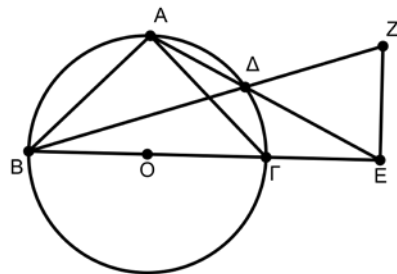
Πρόβλημα 3.

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:

- (i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β ,
- (ii) ο $\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ ,
- (iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α .

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\widehat{\Gamma\hat{E}Z} = 90^\circ$.



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{E\Delta Z}$

(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = E Z$.

Σημείωση: Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες