

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να λυθεί η εξίσωση $x + 2x + 3x + \dots + 100x = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101$.
2. Ποιο από τα κλάσματα

$$K = \frac{33333333331}{33333333334}$$

και

$$\lambda = \frac{22222222221}{22222222223}$$

είναι μεγαλύτερο και γιατί;

3. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, όπου $A\Delta = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $AB = \alpha + \beta$ και η πλευρά AB είναι κάθετος προς τις πλευρές $B\Gamma$ και $A\Delta$. Να υπολογισθεί η απόσταση της κορυφής A από το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ συναρτήσει των α και β .
4. Αν οι αριθμοί α , β , γ , δ και ϵ είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \epsilon)(\epsilon + \alpha) = (\alpha + \gamma)(\gamma + \epsilon)(\epsilon + \beta)(\beta + \delta)(\delta + \alpha);$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $A = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο A και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.
2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς X, Y, Z που είναι τέτοιοι ώστε:
$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$
3. Έστω M σημείο της βάσης $B\Gamma$ ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB=6$. Αν είναι $MK \perp AB$, $ML \perp A\Gamma$ και $K_1\Lambda_1$ είναι η προβολή του $K\Lambda$ στη $B\Gamma$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $KK_1\Lambda_1\Lambda$.
4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $12b + 26a = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5}{12} - (24b + 52a)^{-2} - (72b + 156a)^{-1}.$$

Πρόβλημα 2

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Πρόβλημα 3

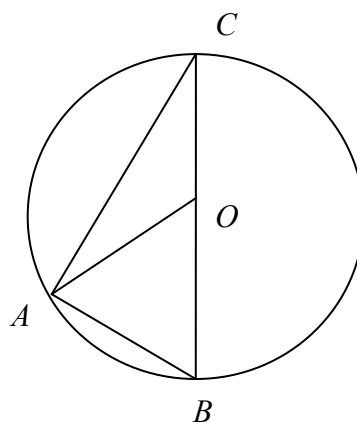
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον $AB = 2\sqrt{7}$ και $AC = 6$.

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC .

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC , να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$



Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $A = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a > 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος B που είναι μικρότερος από τον A κατά 396. Επιπλέον, αν από τον A αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του A . Να προσδιορίσετε τον αριθμό A .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a + 2b = \frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x + 2y}{x - 2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο K , έτσι ώστε να είναι $AK > KB$. Έστω M το συμμετρικό του B , ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο K . Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$A = \left[(-1)^{\nu} + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu} \right] \cdot \nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

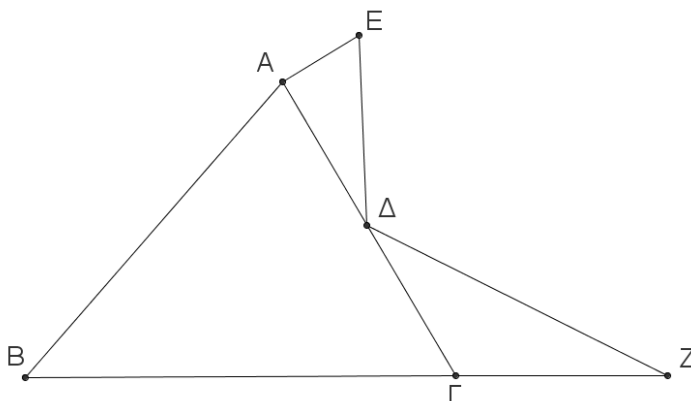
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ = \beta$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, $\hat{\Delta}ΑΕ = 90^\circ$, η ευθεία ΔΕ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ, $\hat{\Delta}ΑΕ = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}Ζ = \theta$ και $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}Ζ = 30^\circ$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ .

Μονάδες 1

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β .

Μονάδες 4



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4} - \frac{7-3x}{8} = 1.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{3\beta} \right)^{-3} - 9\beta^2 - 20,$$

$$\text{για } \beta = -\frac{1}{3}.$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Οι ακέραιοι α, β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha \leq 10, \beta \geq 12 \text{ και } (\alpha - 12) \cdot (40 - 2\beta) \leq 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη της παράστασης $A = 3\alpha - 2\beta$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και E έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 1

(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.

Μονάδες 2

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΒΓΔΕ και εσωτερικά του κύκλου C .

Μονάδες 2

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 198$, όπου $B = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$.

(ii) Η εξίσωση $\frac{x + \alpha - 2\gamma}{2\alpha - \gamma} - \frac{\alpha - 2\gamma}{x} = 1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 9.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2} \right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.

Μονάδες 2

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η

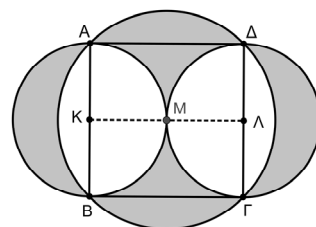
παράσταση $K = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \leq 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να υπολογιστεί συναρτήσει του R , το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y}, \text{ όταν } x = 3^{-2}, y = 3^{-3}.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $B = 16^{23} \cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $AE = AD$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $AZ = EG$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α .

(iii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές a, b, c, d, e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1) = 21$, να βρείτε τις τιμές των a, b, c, d, e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{x}{y} \right)^3, \quad B = \frac{243x^2 + 81y^2}{y} \quad \text{και} \quad \Gamma = x^{-1} + y^{-1}, \quad \text{όταν} \quad x = 3^{-3}, \quad y = 3^{-4}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 16x^6 - 16x^4 - x^2 + 1$ και $Q(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2 + 1)$.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω .

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο της K , την AB στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο M . Αν είναι $A\Delta = \alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α :

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AM και το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = P(2x) - 19P(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{a}{b}$.

Πρόβλημα 3

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον M της $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο $B\Delta$ (το Δ είναι σημείο της $A\Gamma$) στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N . Έστω L είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $K\Delta$.

1. Να αποδείξετε ότι: $NL \perp B\Delta$.

2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα BN , ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία A, L και M . Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις $M\Gamma$, $A\Gamma$ και το τόξο $\widehat{AM}$ του κύκλου ω . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$.

Σημείωση: Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου ω .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)}.$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

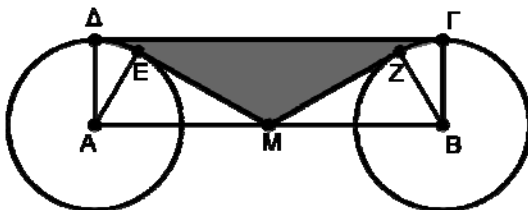
(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$ ισούται με τον κύβο ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AD = a$ και $AB = 4a$. Με κέντρα τα σημεία A , B και ακτίνα a γράφουμε κύκλους. Το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς AB , η ME είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου A και η MZ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου B , όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta AE}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου $\Delta EMZ\Gamma$ που περικλείεται από το τόξο ΔE , τα τμήματα EM, MZ , το τόξο $Z\Gamma$ και το τμήμα $\Gamma\Delta$.



Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες.

Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

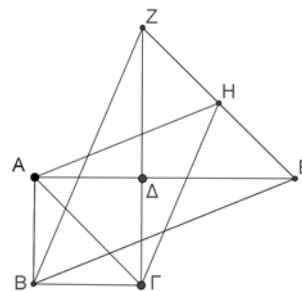
$$A = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}, \beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^3, \gamma = -\frac{27}{16}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΒΔ. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:

- (α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.
- (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.
- (γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.

Σημείωση: Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.



Πρόβλημα 3

- (α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .
- (β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, διαπιστώνει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!