

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $x = 10$
2. Έστω $\alpha = 33333333334$ και $\beta = 22222222223$. Τότε $\kappa = 1 - 3/\alpha$ και $\lambda = 1 - 2/\beta$
και $\kappa - \lambda = 2/\beta - 3/\alpha = (2\alpha - 3\beta)/\alpha\beta = -1/\alpha\beta$. Άρα $\kappa < \lambda$.
3. $(\alpha + \beta)/\sqrt{2}$.
4. Αν ήταν δυνατόν, τότε ο αριθμός
 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \epsilon)(\epsilon + \alpha)(\alpha + \gamma)(\gamma + \epsilon)(\epsilon + \beta)(\beta + \delta)(\delta + \alpha)$ θα ήταν τέλειο
τετράγωνο.
Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4, \epsilon = 5$,
οπότε το γινόμενο αυτό παίρνει την τιμή $2^7 3^5 5^2 7^2$ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ" ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έχουμε

$$A = (2 \cdot 5)^{90} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = 10^{90} \cdot 4 \cdot 81 \cdot 49 = 15876 \cdot 10^{90}.$$

Άρα ο Α λήγει σε 90 μηδενικά και το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του είναι το 6.

2. Έχουμε

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z} \Leftrightarrow 4x = 3y \text{ και } xz = 18 \Leftrightarrow y = \frac{4x}{3} \text{ και } xz = 18.$$

Επειδή οι αριθμοί x, z είναι φυσικοί έχουμε

$$xz = 18 \Leftrightarrow (x, z) = (1, 18) \text{ ή } (2, 9) \text{ ή } (3, 6) \text{ ή } (6, 3) \text{ ή } (9, 2) \text{ ή } (18, 1),$$

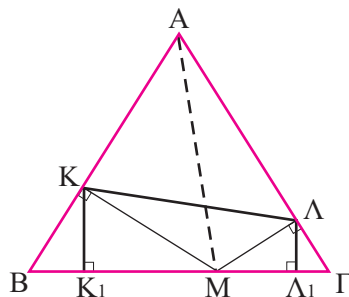
οπότε, από την ισότητα $y = \frac{4x}{3}$ προκύπτει ότι :

$$(x, y, z) = (3, 4, 6) \text{ ή } (6, 8, 3) \text{ ή } (9, 12, 2) \text{ ή } (18, 24, 1).$$

3. Έχουμε

$$(AB\Gamma) = (ABM) + (A\Gamma M) \Leftrightarrow \frac{36\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot MK + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot MK \Leftrightarrow$$

$$MK + M\Lambda = 3\sqrt{3} \quad (1)$$



Από τα ορθογώνια τρίγωνα KK_1M και $\Lambda\Lambda_1M$ γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά έχουμε

$$KK_1 = \frac{1}{2} MK, \quad \Lambda\Lambda_1 = \frac{1}{2} M\Lambda \text{ και}$$

$$MK_1 = MK \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad M\Lambda_1 = M\Lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Οπότε } K_1\Lambda_1 = MK_1 + M\Lambda_1 = (MK + M\Lambda) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\text{και } KK_1 + \Lambda\Lambda_1 = \frac{1}{2}(MK + M\Lambda) = \frac{1}{2} 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Άρα είναι } (KK_1\Lambda\Lambda_1) = \frac{1}{2}(KK_1 + \Lambda\Lambda_1)K_1\Lambda_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \dots + 15 = 120 > 115.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2008 ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι $12b + 26a = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5}{12} - (24b + 52a)^{-2} - (72b + 156a)^{-1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{12} - (24b + 52a)^{-2} - (72b + 156a)^{-1} \\ &= \frac{5}{12} - [2 \cdot (12b + 26a)]^{-2} - [6(12b + 26a)]^{-1} \\ &= \frac{5}{12} - (2 \cdot 1)^{-2} - (6 \cdot 1)^{-1} = \frac{5}{12} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Λύση

Το τρίτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο για $\frac{1}{2} \cdot 12 + 2 = 8$ ημέρες.

Αν x, y και z είναι το μηνιαίο κόστος για το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σχολείο, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \lambda,$$

οπότε λαμβάνουμε $x = 12\lambda$, $y = 10\lambda$, $z = 8\lambda$ και έχουμε

$$x + y + z = 3000 \Leftrightarrow 12\lambda + 10\lambda + 8\lambda = 3000 \Rightarrow \lambda = 100.$$

Άρα έχουμε:

— $\frac{x}{12} = 100 \Rightarrow x = 12 \cdot 100 = 1200$ ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το πρώτο σχολείο, οπότε

— για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3600 ευρώ.

— $\frac{y}{10} = 100 \Rightarrow y = 10 \cdot 100 = 1000$ ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το δεύτερο σχολείο,

— — — οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3000 ευρώ.

— $\frac{z}{8} = 100 \Rightarrow z = 8 \cdot 100 = 800$ ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το τρίτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 2400 ευρώ.

Πρόβλημα 3

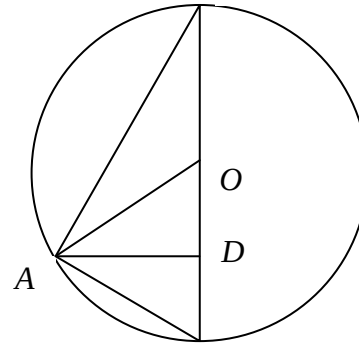
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και είναι ακόμα $AB = 2\sqrt{7}$ και $AC = 6$.

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου που αντιστοιχούν στην πλευρά BC .

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$



Λύση

α) Επειδή είναι $\hat{A} = 90^\circ$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + (2\sqrt{7})^2 = 36 + 4 \cdot 7 = 64.$$

Άρα είναι $BC = 8$.

β) Η διάμεσος AO ισούται με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι $AO = \frac{8}{2} = 4$.

Για την εύρεση του ύψους AD χρησιμοποιούμε τους τύπους για το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου και έχουμε:

$$(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow 8 \cdot AD = 6 \cdot 2\sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

γ) Έχουμε $E = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου έχει

$$\text{εμβαδόν } E_x = E - (ABC) = 16\pi - \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 16\pi - 6\sqrt{7}, \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{E} > \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \frac{16\pi - 6\sqrt{7}}{16\pi} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 48\pi - 18\sqrt{7} > 32\pi \Leftrightarrow 16\pi > 18\sqrt{7} \\ &\Leftrightarrow 8\pi > 9\sqrt{7} \Leftrightarrow 64\pi^2 > 81 \cdot 7 \Leftrightarrow \pi^2 > \frac{567}{64}, \end{aligned}$$

που ισχύει, γιατί είναι $\pi^2 = 3,14^2 > 3^2 = 9$, ενώ $\frac{567}{64} < 9$.

Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $A = \overline{abc}$, όπου a, b, c ψηφία με $a \neq 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος B που είναι μικρότερος από τον A κατά 396. Επιπλέον, αν από τον A αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του A . Να βρείτε τον αριθμό A .

Λύση

Είναι $A = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, οπότε μετά την εναλλαγή πρώτου και τρίτου ψηφίου προκύπτει ο αριθμός $B = \overline{cba} = 100c + 10b + a$, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} A - B = 396 &\Leftrightarrow 99(a - c) = 396 \Leftrightarrow a - c = 4 \\ &\Leftrightarrow c = a - 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Επιπλέον δίνεται ότι

$$\begin{aligned} A - 41 = 50(a + b + c) &\Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c \\ &\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41, \end{aligned}$$

οπότε, λόγω της (1), λαμβάνουμε

$$50a - 40b - 49(a - 4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \quad (2)$$

Επειδή ο ακέραιος είναι ψηφίο μεγαλύτερο του μηδενός, έπεται ότι

$$1 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 40b - 155 \leq 9 \Leftrightarrow 156 \leq 40b \leq 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40},$$

οπότε λαμβάνουμε $b = 4$. Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει $a = 5$ και $c = 1$.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $A = 541$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2009

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a + 2b = \frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned} A &= (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3 \\ &= \frac{1}{16^2 (a + 2b)^2} - \frac{1}{32^3 (a + 2b)^3} + \left[\left(-\frac{3}{2} \right)^4 \cdot \frac{1}{3^4} \right]^3 \\ &= \frac{1}{(2^4)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} - \frac{1}{(2^5)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3} + \left[\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{1}{3^4} \right]^3 \\ &= \frac{1}{2^{8-2}} - \frac{1}{2^{15-3}} + \frac{1}{2^{4 \cdot 3}} = \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x + 2y}{x - 2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2 + 4y^2 + 2x \cdot 2y = \frac{20}{3}xy + 4xy \Rightarrow (x + 2y)^2 = \frac{32}{3}xy,$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x \cdot 2y = \frac{20}{3}xy - 4xy \Rightarrow (x - 2y)^2 = \frac{8}{3}xy > 0,$$

οπότε έχουμε:

$$A^2 = \frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2} = \frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy} = 4 \Leftrightarrow A = 2 \text{ ή } A = -2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση

$u = \frac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4 - \frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow u^2 - \frac{20}{3}u + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{64}{9} = 0$$

$$u - \frac{10}{3} = \frac{8}{3} \text{ ή } u - \frac{10}{3} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow u = 6 \text{ ή } u = \frac{2}{3}.$$

Για $u = \frac{x}{y} = 6$ λαμβάνουμε $x = 6y$, οπότε: $A = \frac{6y+2y}{6y-2y} = 2.$

Για $u = \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x = 2y$, οπότε: $A = \frac{x+3x}{x-3x} = -2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία, $a \neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab + 4(a + b) = 10a + b,$$

όπου a, b ψηφία, $a \neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab + 4a + 4b = 10a + b \Leftrightarrow ab - 6a + 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow a(b - 6) + 3(b - 6) = -18 \Leftrightarrow (a + 3)(b - 6) = -18$$

$$\Leftrightarrow (a + 3)(6 - b) = 18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4 \leq a + 3 \leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a + 3, 6 - b) = (6, 3) \text{ ή } (9, 2)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (3, 3) \text{ ή } (6, 4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο K , έτσι ώστε να είναι $AK > KB$. Έστω M το συμμετρικό του B ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο K . Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία ΓM τέμνει την πλευρά $A\Delta$ στο σημείο E . Η ΓE είναι ύψος του τριγώνου $A\Gamma\Delta$, αν είναι $\Gamma E \perp A\Delta$ ή $\widehat{\Gamma E\Delta} = 90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\widehat{E\Gamma\Delta} + \widehat{\Gamma\Delta E} = 90^\circ$.

Όμως είναι

$$\widehat{E\Gamma\Delta} = \widehat{K\Gamma B}, \quad (1)$$

λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία $\Gamma\Delta$.

Επίσης έχουμε

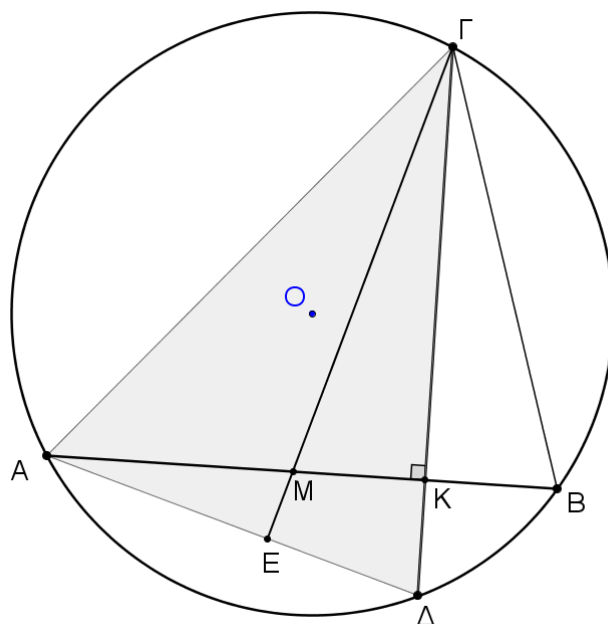
$$\widehat{\Gamma\Delta E} = \widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Gamma\Delta B} = \widehat{\Gamma\Delta K},$$

αφού οι γωνίες $\widehat{\Gamma\Delta A}$, $\widehat{\Gamma\Delta B}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

(2)

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$\mathbf{E}\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}\mathbf{E} = \mathbf{K}\hat{\Gamma}\mathbf{B} + \mathbf{B}\hat{\Gamma}\mathbf{K} = 180^0 - \mathbf{K}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{B} = 180^0 - 90^\circ = 90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{K}$ και $\hat{K}\hat{\Gamma}\hat{B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓKB . Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $AK \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή AK είναι επίσης ύψος του τριγώνου $A\Gamma\Delta$, οπότε το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Ἐστω ὁ ἀκέραιος

$$A = \left[(-1)^\nu + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu} \right] \cdot \nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο A είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του n .

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left[(-1)^\nu + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu} \right] \cdot \nu = \left[(-1)^\nu + 1 + \left((-1)^3 \right)^\nu + 1 \right] \cdot \nu \\ &= \left[2 + 2 \cdot (-1)^\nu \right] \cdot \nu = \begin{cases} 4\nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } \nu \text{ περιττός.} \end{cases} \end{aligned}$$

Επειδή ο ακέραιος A είναι διαιρέτης του 24, έπεται ότι:

- $A \neq 0$, τότε ο ν δεν μπορεί να είναι περιττός.
- Ο θετικός ακέραιος $A = 4\nu$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος, ανήκει στο σύνολο των άρτιων θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή είναι:

$4\nu \in \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος,

$$\Leftrightarrow \nu \in \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6 \right\}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu = 2 \text{ ή } \nu = 6.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του ν είναι το 2 και το 6.

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Λύση

Ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$10a + b = ab - (a + b) \Leftrightarrow 11a = ab - 2b \Leftrightarrow (11 - b)a = -2b.$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί ο όρος $(11 - b)a$ του πρώτου μέλους είναι θετικός, ενώ ο όρος του δευτέρου μέλους είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3

Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα S είναι άθροισμα 250 αθροισμάτων της μορφής

$$S_k = (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2, \text{ για } k = 0, 1, 2, 3, \dots, 249.$$

Όμως έχουμε

$$\begin{aligned} S_k &= (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 16k - 4 - 16k^2 - 24k - 9 + 16k^2 + 32k + 16 \\ &= 4, \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, 3, \dots, 249. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$S = S_0 + S_1 + \dots + S_{249} = 4 + 4 + \dots + 4 = 250 \cdot 4 = 1000$$

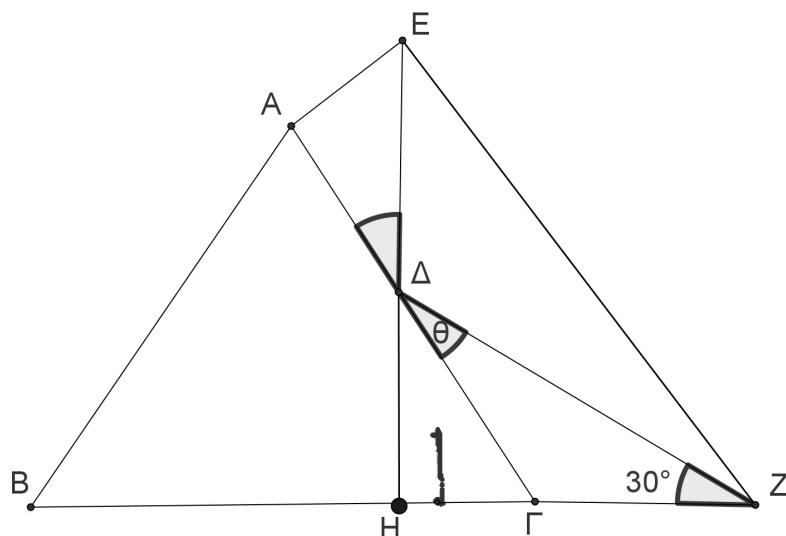
Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι: το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ = \beta$ του τριγώνου

$ΑΒΓ$, $\hat{\Delta}ΑΕ = 90^\circ$, η $ΔΕ$ είναι κάθετη προς τη $ΒΓ$, $\hat{Α}ΔΕ = \hat{\Gamma}ΔΖ = \theta$ και $\hat{\Gamma}ΖΔ = 30^\circ$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ .

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος EZ συναρτήσει του β .



Λύση

(i) Έστω ότι η ευθεία $ΔΕ$ τέμνει τη $ΒΓ$ στο σημείο $Η$. Τότε θα είναι

$$\hat{H}ΔΓ = \theta \text{ (ως κατά κορυφή)} \text{ και } \hat{H}ΔΖ = \hat{H}ΔΓ + \hat{\Gamma}ΔΖ = 2\theta,$$

οπότε από το τρίγωνο $ΗΔΖ$ έχουμε:

$$90^\circ + 2\theta + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \theta = 30^\circ$$

(ii) Το τρίγωνο HEZ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα EZ, οπότε για τον υπολογισμό της EZ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές HZ και HE συναρτήσει του β .

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και έχει $\widehat{H\Delta\Gamma} = \theta = 30^\circ$ λαμβάνουμε:

$$H\Delta = \Delta\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } H\Gamma = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\widehat{H\Delta\Gamma} = \theta = 30^\circ$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30° θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή είναι $H\Gamma = \frac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $H\Delta = \frac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισοσκελές ($\widehat{\Gamma\Delta Z} = \widehat{\Gamma\hat{A}Z} = 30^\circ$), οπότε θα είναι $\Gamma Z = \Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και

$$HZ = H\Gamma + \Gamma Z = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ με $\widehat{\Delta\hat{A}E} = 90^\circ$, $\widehat{A\hat{A}E} = 30^\circ$ και $A\Delta = \frac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$\Delta E = \frac{A\Delta}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$HE = H\Delta + \Delta E = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο HEZ με $\hat{H} = 90^\circ$ έχουμε:

$$EZ = \sqrt{HE^2 + HZ^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4} - \frac{7-3x}{8} = 1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{3\beta} \right)^{-3} - 9\beta^2 - 20, \quad \text{για } \beta = -\frac{1}{3}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2x+18}{4} - \frac{7-3x}{8} = 1 &\Leftrightarrow 2 \cdot (2x+18) - (7-3x) = 8 \Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8 \\ &\Leftrightarrow 7x+29=8 \Leftrightarrow 7x=8-29 \Leftrightarrow 7x=-21 \Leftrightarrow x=-3. \end{aligned}$$

(β) Για $\beta = -\frac{1}{3}$ η παράσταση A γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \right)^{-3} - 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 20 = \left(\frac{1}{\frac{1}{9}} + \frac{1}{9} \right) \cdot \left(\frac{1}{-1} \right)^{-3} - 9 \cdot \frac{1}{9} - 20 \\ &= \left(9 + \frac{1}{9} \right) \cdot (-1)^3 - 1 - 20 = \left(\frac{81}{9} + \frac{1}{9} \right) \cdot (-1) - 1 - 20 = -\frac{82}{9} - 1 - 20 \\ &= -\frac{82}{9} - \frac{9}{9} - \frac{180}{9} = -\frac{271}{9}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2Οι θετικοί ακέραιοι α, β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha \leq 10, \quad \beta \geq 12 \quad \text{και} \quad (\alpha - 12) \cdot (40 - 2\beta) \leq 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $A = 3\alpha - 2\beta$.**Λύση**

Είναι $\alpha \leq 10$, οπότε $\alpha - 12 < 0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha - 12) \cdot (40 - 2\beta) \leq 0$, αρκεί να ισχύει ότι: $40 - 2\beta \geq 0 \Leftrightarrow 40 \geq 2\beta \Leftrightarrow \beta \leq 20$. Έτσι έχουμε:

$$0 \leq \alpha \leq 10 \quad \text{και} \quad 12 \leq \beta \leq 20 \Rightarrow 0 \leq 3\alpha \leq 30 \quad \text{και} \quad 24 \leq 2\beta \leq 40$$

$$\Rightarrow 0 \leq 3\alpha \leq 30 \quad \text{και} \quad -40 \leq -2\beta \leq -24,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40 \leq A = 3\alpha - 2\beta \leq 6,$$

οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης A είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ABE εξωτερικά του τετραγώνου ABΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

- (i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.
- (ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.
- (iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΔΓΒΕ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

- (i) Στα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ ισχύουν: $AE = BE = \alpha$, $AD = BG = \alpha$ και $\hat{EAD} = \hat{EBG} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΒΕΓ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια $ΕΔ = ΕΓ$, δηλαδή το τρίγωνο $ΕΔΓ$ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $ΕΔ = ΕΓ$, το σημείο $Ε$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος $ΔΓ$ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος $ΑΒ$). Επίσης $ΕΑ = ΕΒ$, οπότε το σημείο $Ε$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος $ΑΒ$. Άρα η $ΟΕ$ είναι μεσοκάθετη της $ΑΒ$ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $ΑΕΒ$ του

ισόπλευρου τριγώνου $ΑΕΒ$. Άρα είναι $\hat{Ε} = 30^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} ΑΕ = ΑΔ = \alpha \\ ΟΕ = ΟΔ = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow ΟΑ \text{ μεσοκάθετη της } ΕΔ \Rightarrow ΟΑ \text{ διχοτόμος της}$$

$$\Delta \hat{Α}Ε \Rightarrow \hat{Α} = 75^\circ.$$

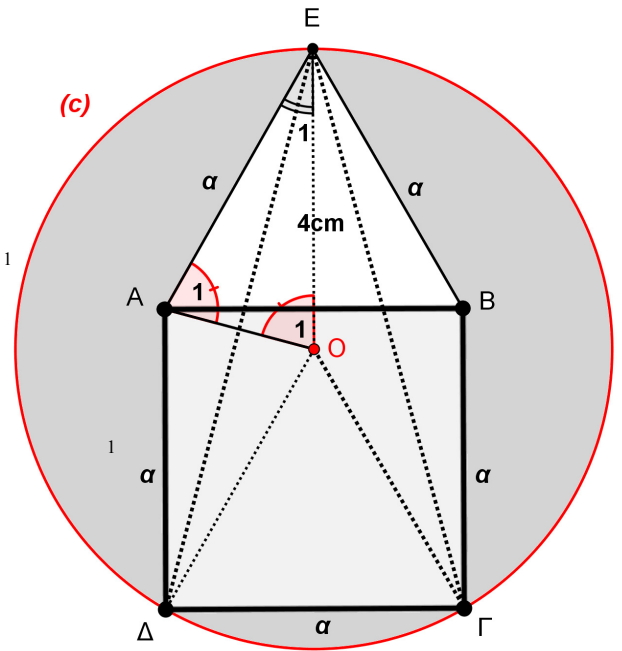
Στο τρίγωνο $ΑΟΕ$ έχουμε:

$$\hat{Α}_1 = 75^\circ \text{ και } \hat{Ε}_1 = 30^\circ. \text{ Άρα } \hat{Ο}_1 = 75^\circ, \text{ οπότε το τρίγωνο } ΑΟΕ \text{ είναι}$$

ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΟ = \alpha = 4\text{cm}$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $E_c = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ είναι: $E_{\text{τετ}} = 4^2 = 16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΕ$ είναι: $E_{\text{τρ}} = 4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $E = 16\pi - 16 - 4\sqrt{3}$.



Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 198$, όπου $B = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\frac{x + \alpha - 2\gamma}{2\alpha - \gamma} - \frac{\alpha - 2\gamma}{x} = 1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός A διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 198 \Leftrightarrow 99 \cdot (\alpha - \gamma) = 198 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 2. \quad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii), αν $\gamma \neq 2\alpha$ και $x \neq 0$, γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{x + \alpha - 2\gamma}{2\alpha - \gamma} - \frac{\alpha - 2\gamma}{x} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{x + \alpha - 2\gamma}{2\alpha - \gamma} - \frac{x + \alpha - 2\gamma}{x} = 0 \Leftrightarrow (x + \alpha - 2\gamma) \left(\frac{1}{2\alpha - \gamma} - \frac{1}{x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow x + \alpha - 2\gamma &= 0 \text{ ή } \frac{1}{2\alpha - \gamma} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2\gamma - \alpha \text{ ή } x = 2\alpha - \gamma \end{aligned}$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma - \alpha) + (2\alpha - \gamma) = 4 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 4, \quad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma \neq 2\alpha$ και $\alpha \neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha = 6, 2\gamma = 2 \Leftrightarrow \alpha = 3, \gamma = 1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος A θα έχει τη μορφή $A = \overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4 + \beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο A διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4 + \beta = \text{πολ.}(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta = 5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος A είναι ο 351.

Πρόβλημα 1**(α)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2} \right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.**(β)** Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι ηπαράσταση $K = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \leq 1$.Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.**Λύση****(α)** Για $\alpha = \beta = 2^{-3}$ λαμβάνουμε $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{2^{-3}}{(2^{-3})^2} = \frac{2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$.Η παράσταση A γράφεται:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} \right)^3 + 9 \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} - 20 = (8 + 237) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 8 \right)^3 + 9 \cdot 8 - 20 \\ &= 245 \cdot 2^3 + 72 - 20 = 245 \cdot 8 + 52 = 2012. \end{aligned}$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $x = \alpha y$, οπότε η παράσταση γράφεται

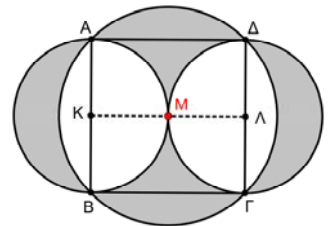
$$K = \frac{2\alpha y y}{\alpha^2 y^2 + y^2} = \frac{2\alpha y^2}{(\alpha^2 + 1)y^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1},$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y και εξαρτάται μόνο από το λόγο α . Επιπλέον, ισχύει

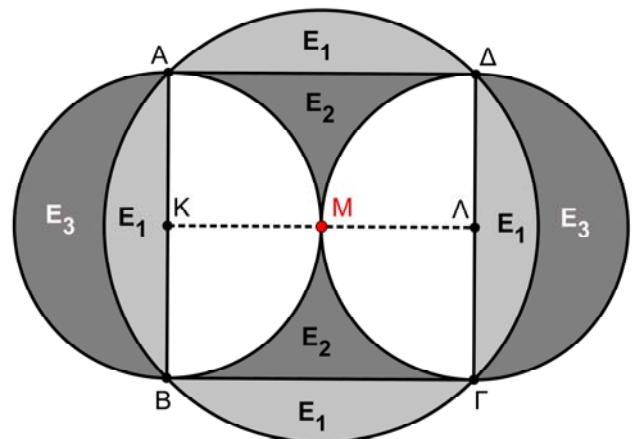
$$K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο είναι αληθές. Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $\alpha - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 1$.**Πρόβλημα 2**

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να υπολογιστεί συνάρτησε του R , το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.

**Λύση**

Επειδή είναι $AK = \Delta\Lambda$ και $AK \parallel \Delta\Lambda$, ως κάθετες στη διάκεντρο $K\Lambda$, το τετράπλευρο $AK\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε θα είναι $A\Delta = K\Lambda = 2R$. Ομοίως προκύπτει ότι και το τετράπλευρο $KB\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ότι $B\Gamma = K\Lambda = 2R$.



Επομένως, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό $(ΑΒΓΔ) = 4R^2$. Το τρίγωνο ΑΚΜ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $ΚΑ = ΚΜ = R$. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ = R\sqrt{2}$, δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $E = (\sqrt{2})^2 = 2\pi R^2$.

Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων ΜΑΔ και ΜΒΓ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2E_2 = (ΑΒΓΔ) - \pi R^2 \Leftrightarrow 2E_2 = 4R^2 - \pi R^2 \Leftrightarrow E_2 = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων E_3 έχουμε: $E_3 = \frac{\pi R^2}{2} - E_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2E_1 + 2E_2 + 2E_3 = 2E_1 + (4-\pi)R^2 + \pi R^2 - 2E_1 = 4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$E_1 = \frac{E - (ΑΒΓΔ)}{4} = \frac{2\pi R^2 - 4R^2}{4} = \frac{(\pi - 2)R^2}{2}.$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος γιατί απλοποιείται με τις πράξεις.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $A = \{101, 102, 103, \dots, 2012\}$ έχει $2012 - 100 = 1912$ στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής $3κ$, όπου $κ$ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \leq 3κ \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{3} \leq κ \leq \frac{2012}{3} \Leftrightarrow 33\frac{2}{3} \leq κ \leq 670\frac{2}{3} \Leftrightarrow κ \in \{34, 35, \dots, 670\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $670 - 33 = 637$.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής $8κ$, όπου $κ$ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \leq 8κ \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{8} \leq κ \leq \frac{2012}{8} \Leftrightarrow 12\frac{5}{8} \leq κ \leq 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow κ \in \{13, 14, \dots, 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $251 - 12 = 239$.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 3 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ $\{3, 8\} = 24$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$101 \leq 24κ \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{24} \leq κ \leq \frac{2012}{24} \Leftrightarrow 4\frac{5}{24} \leq κ \leq 83\frac{20}{24} \Leftrightarrow κ \in \{5, 6, \dots, 83\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 3 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι $83 - 4 = 79$.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $637 + 239 - 79 = 797$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $1912 - 797 = 1115$ στοιχεία.

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x) = (ax^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Έχουμε $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$ και

$$Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4 = \alpha\gamma x^4 + \beta\gamma x^3 + \alpha\delta x^2 + \beta\delta x + 4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma = 1, \beta\gamma = 0, \alpha\delta = -5, \beta\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \{\beta = 0 \text{ ή } \gamma = 0\}, \{\beta = 0 \text{ ή } \delta = 0\}, \alpha\gamma = 1, \alpha\delta = -5.$$

Οι τιμές $\gamma = 0$ και $\delta = 0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις,

οπότε λαμβάνουμε $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{\alpha}, \delta = -\frac{5}{\alpha}, \alpha \neq 0$. Από την εξίσωση $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, με αντικατάσταση των τιμών των β, γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha - \frac{4}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 + 3\alpha - 3 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha + 1) + 3(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \text{ ή } \alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -5 \text{ ή } \alpha = -4, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{4}, \delta = \frac{5}{4}.$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2013

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y}, \text{ όταν } x = 3^{-2}, y = 3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $B = 16^{23} \cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x = 3^{-2}, y = 3^{-3}$ έχουμε $\frac{x^3}{y^2} = \frac{(3^{-2})^3}{(3^{-3})^2} = \frac{3^{-6}}{3^{-6}} = 1, \frac{x}{y} = \frac{3^{-2}}{3^{-3}} = \frac{3^3}{3^2} = 3$ και

$$\frac{81x^2 + 27y}{y} = \frac{81 \cdot (3^{-2})^2 + 27 \cdot 3^{-3}}{3^{-3}} = \frac{81 \cdot 3^{-4} + 27 \cdot 3^{-3}}{3^{-3}} = \frac{81 \cdot \frac{1}{81} + 27 \cdot \frac{1}{27}}{3^{-3}} = 2 \cdot 3^3.$$

Άρα έχουμε

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y} = \left(1 + \frac{1}{3} \right) \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 27 = 36 + 54 = 90.$$

(β) Ο αριθμός B γράφεται στη μορφή

$$B = 16^{23} \cdot 5^{89} = (2^4)^{23} \cdot 5^{89} = 2^{92} \cdot 5^{89} = 2^3 \cdot (2^{89} \cdot 5^{89}) = 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^{89} = 2^3 \cdot 10^{89} = 8 \cdot 10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός B έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $(65 + 45) - 20 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100 - 90 = 10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24 + 12 = 36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36 \cdot \frac{100}{10} = 360$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360 \cdot \frac{65}{100} = 234$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360 \cdot \frac{45}{100} = 162$.

Πρόβλημα 3

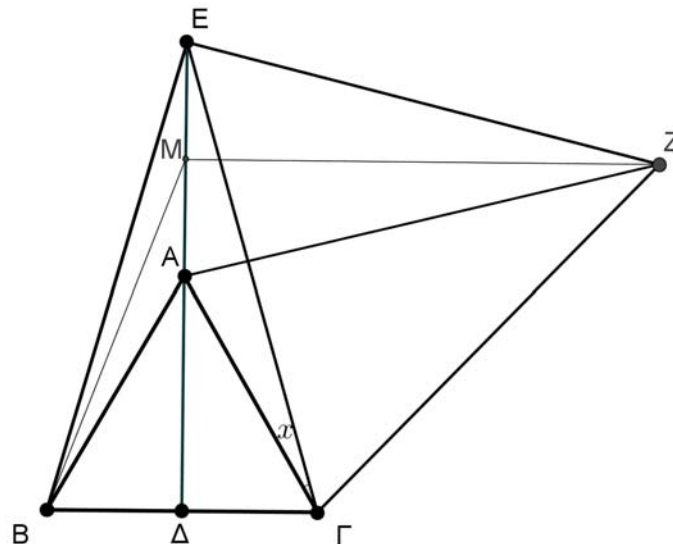
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α . Προεκτείνουμε το ύψος του $A\Delta$ προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = A\Delta$. Φέρουμε τις EB , $E\Gamma$ και εξωτερικά του τριγώνου $EB\Gamma$ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $EZ\Gamma$. Έστω M το μέσον του τμήματος AE .

(i) Να αποδείξετε ότι: $AZ = E\Gamma$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου $AGZE$ ως συνάρτηση του α .

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $B\Gamma ZM$ ως συνάρτηση του α .

Λύση



(i) Τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $ZA\Gamma$ έχουν:

1. $B\Gamma = A\Gamma$ (διότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο).

2. $E\Gamma = Z\Gamma$ (διότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο).

3. $\widehat{E\Gamma B} = \widehat{Z\Gamma A} = 60^\circ + \hat{x}$, όπου $\hat{x} = \widehat{A\Gamma E}$.

Άρα τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $ZA\Gamma$ είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $AZ = E\Gamma$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς α , οπότε το ύψος του $A\Delta$ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $AE = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $E\Delta = \alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(AGZE) = (A\Gamma Z) + (ZAE) = (EB\Gamma) + (ZAE)$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων $EB\Gamma$ και $A\Gamma Z$ έπεται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο $EB\Gamma$ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $B\Gamma = \alpha$ με αντίστοιχο ύψος $E\Delta = 2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$(EB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \alpha\sqrt{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ZAE θεωρούμε ως βάση το τμήμα $AE = \Delta\Gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ($AZ = E\Gamma = ZE$) και το M είναι μέσο του τμήματος AE έπεται ότι το ZM είναι ύψος του τριγώνου ZAE που αντιστοιχεί στη βάση AE. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ZAM λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ZM &= \sqrt{ZA^2 - AM^2} = \sqrt{E\Gamma^2 - AM^2} = \sqrt{E\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - AM^2} \\ &= \sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{16}} = \frac{7\alpha}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα έχουμε } (ZAE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7\alpha}{4} = \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}, \text{ οπότε}$$

$$(A\Gamma ZE) = (EB\Gamma) + (ZAE) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16} = \frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο BΓZM είναι τραπέζιο ($ZM \parallel B\Gamma$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία ΔΕ. Βάσεις του τραπέζιου αυτού είναι οι $B\Gamma = \alpha$, $ZM = \frac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα

$$\Delta M = \Delta A + \Delta M = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}, \text{ οπότε έχει εμβαδό}$$

$$(B\Gamma ZM) = \frac{1}{2}(B\Gamma + ZM) \cdot \Delta M = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{7\alpha}{4}\right) \cdot \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές a, b, c, d, e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1) = 21$, να βρείτε τις τιμές των a, b, c, d, e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1) = 21$ έχουμε ότι $P(1) = (a + b + c)(a + b) = 21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a + b + c > a + b$, έπεται ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 7 \\ a + b = 3 \end{array} \right\} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 21 \\ a + b = 1 \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Επειδή οι a, b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a + b = 1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a + b = 3$ και $c = 4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) = a^2x^3 + 2abx^2 + (b^2 + ac)x + bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \{a^2 = a^2, 2ab = 4, b^2 + ac = d, bc = e\}.$$

Επειδή $c = 4$ και $a + b = 3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a + b = 3, ab = 2, c = 4, b^2 + 4a = d, 4b = e, a, b, c, d, e \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = 2, c = 4, d = 8, e = 8 \text{ ή } a = 2, b = 1, c = 4, d = 9, e = 4.$$

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{x}{y} \right)^3, \quad B = \frac{243x^2 + 81y^2}{y} \quad \text{και} \quad \Gamma = x^{-1} + y^{-1}, \quad \text{όταν} \quad x = 3^{-3}, y = 3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(3^{-3})^3}{(3^{-4})^3} + \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}} \right)^3 = \left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}} + \frac{1}{3} \right) : (3^{-3+4})^3 = \left(3^{-9+12} + \frac{1}{3} \right) : (3^1)^3 \\ &= \left(3^3 + \frac{1}{3} \right) : 3^3 = 1 + \frac{1}{3^4} = \frac{3^4 + 1}{3^4} = \frac{82}{81}. \end{aligned}$$

$$B = \frac{243 \cdot (3^{-3})^2 + 81 \cdot (3^{-4})^2}{3^{-4}} = \frac{3^5 \cdot 3^{-6} + 3^4 \cdot 3^{-8}}{3^{-4}} = \frac{3^{-1} + 3^{-4}}{3^{-4}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}} = \frac{\frac{3^3 + 1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}} = 3^3 + 1 = 28.$$

$$\Gamma = 3^3 + 3^4 = 27 + 81 = 108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 16x^6 - 16x^4 - x^2 + 1$ και $Q(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2 + 1)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= 16x^6 - 16x^4 - x^2 + 1 = 16x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (16x^4 - 1)(x^2 - 1) = \\ &= (4x^2 + 1)(4x^2 - 1)(x^2 - 1) = (4x^2 + 1)(2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1). \\ Q(x) &= 4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 4x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \\ &= (4x^2 - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2 + 1) \Leftrightarrow 4x^2 + 1 = \frac{5}{2}(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

με τον περιορισμό $Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{2}$ και $x \neq \pm 1$. Επομένως η δεδομένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω .

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $x = 2014 - y$ και

$$2014 - y = \omega y + 97, \text{ με } y > 97 \text{ και } \omega \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + \omega)y = 1917, \text{ με } y > 97 \text{ και } 1 + \omega \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (1 + \omega)y = 3^3 \cdot 71, \text{ με } y > 97 \text{ και } 1 + \omega \geq 2.$$

Επομένως ο y είναι διαιρέτης του $1917 = 3^3 \cdot 71$ μεγαλύτερος από το 97, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι

$$y = 3 \cdot 71 = 213 \text{ ή } y = 3^2 \cdot 71 = 639 \text{ ή } y = 3^3 \cdot 71 = 1917$$

- Για $y = 213$, είναι $x = 1801$ και $\omega = 8$.
- Για $y = 639$, είναι $x = 1375$ και $\omega = 2$.
- Για $y = 1917$, είναι $x = 97 < y = 1917$, άτοπο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με $\hat{A}\Gamma\Delta = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο της K , την AB στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο M . Αν είναι $A\Delta = \alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α :

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AM και το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

Λύση

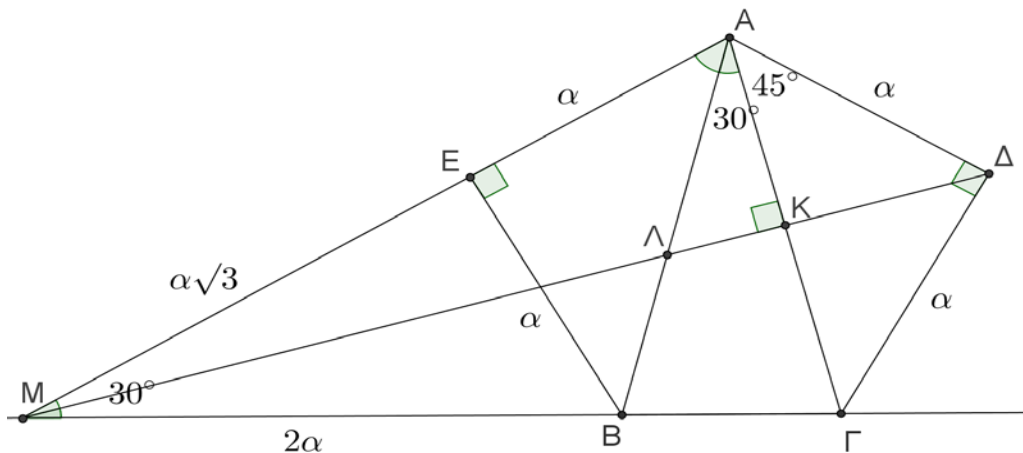
(α) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $A\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$, οπότε θα είναι: $AK = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Lambda$ με $\hat{K}\Lambda\Lambda = 30^\circ$, αν $K\Lambda = x$, έχουμε

$$x = K\Lambda = A\Lambda \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot A\Lambda \Rightarrow A\Lambda = 2x,$$

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε:

$$AK^2 + x^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = AK^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$



(β) Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης $M\Delta$ του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ ισαπέχει από τα άκρα του A και Γ το τρίγωνο $MA\Gamma$ είναι ισοσκελές με

$$MA = M\Gamma \text{ και } \hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

οπότε $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = 75^\circ \Leftrightarrow \hat{M}\hat{A}\hat{B} + 30^\circ = 75^\circ \Leftrightarrow \hat{M}\hat{A}\hat{B} = 45^\circ$.

Από το σημείο B φέρουμε ευθεία κάθετη προς την ευθεία MA που την τέμνει, έστω στο E , οπότε σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα AEB και BEM .

Το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, γιατί έχουν ίσες υποτείνουσες $AB = A\Gamma$. Άρα είναι $AE = \alpha$ και $BE = \alpha$.

Το τρίγωνο BME έχει

$$\hat{M}\hat{B}\hat{E} = \hat{B}\hat{M}\hat{A} = 180^\circ - 2 \cdot \hat{\Gamma} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$BE = BM \cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot BM \Rightarrow BM = 2\alpha \text{ και}$$

$$ME = BM \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow ME = 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$AM = AE + ME = \alpha(1 + \sqrt{3}).$$

Τέλος από την ισότητα $MG = MA$ λαμβάνουμε:

$$2\alpha + BG = \alpha\sqrt{3} + \alpha \Leftrightarrow BG = \alpha(\sqrt{3} - 1).$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = P(2x) - 19P(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x + 2)^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(2x) - 19P(-x) = (2x)^3 + a(2x)^2 + b \cdot 2x + c - 19((-x)^3 + a(-x)^2 + b(-x) + c) \\ &= 8x^3 + 4ax^2 + 2bx + c + 19x^3 - 19ax^2 + 19bx - 19c = 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα $Q(x) = 3x(3x + 2)^2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c &= 3x(3x + 2)^2 \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c &= 3x(9x^2 + 12x + 4) \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c &= 27x^3 + 36x^2 + 12x \\ \Leftrightarrow \{-15a = 36, 21b = 12, -18c = 0\} \\ \Leftrightarrow \left\{ a = -\frac{12}{5}, b = \frac{4}{7}, c = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Άρα είναι: $P(x) = x^3 - \frac{12}{5}x^2 + \frac{4}{7}x$.

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a + b)(a - b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a - b)}{a(a + b)} + \frac{b(a + b)}{a(a - b)} = \frac{3ab - b^2}{a^2 - b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a + 2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{a}{b}$.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{b(a - b)}{a(a + b)} + \frac{b(a + b)}{a(a - b)} &= \frac{3ab - b^2}{a^2 - b^2} \Leftrightarrow b(a - b)^2 + b(a + b)^2 = a(3ab - b^2) \\ \Leftrightarrow b[(a - b)^2 + (a + b)^2] - ab(3a - b) &= 0 \Leftrightarrow b(2a^2 + 2b^2) - ab(3a - b) = 0 \\ \Leftrightarrow b(2a^2 + 2b^2 - 3a^2 + ab) &= 0 \stackrel{b \neq 0}{\Leftrightarrow} 2b^2 - a^2 + ab = 0 \Leftrightarrow a^2 = b(a + 2b). \end{aligned}$$

(β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\begin{aligned} a^2 - ab - 2b^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0, x = \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 - x - 1 = 0, x = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) - (x + 1) = 0, x = \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0, x = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2, x = \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -1 \text{ (απορρίπτεται, γιατί } a \neq -b) \text{ ή } \frac{a}{b} = 2 &\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3.

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz}$ $100x+10y+z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx}=100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyz}=100x+10y+z=43(x+y+z)+9 \quad (1)$$

$$\overline{zyx}=100z+10y+x=30(x+y+z)+6, \quad (2)$$

από τις οποίες για τη διαφορά των δύο αριθμών προκύπτει ότι:

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=99(x-z)=13(x+y+z)+3. \quad (3)$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $10 \leq x+y+z \leq 23$, γιατί, αν ήταν $x+y+z \geq 24$, τότε θα είχαμε $\overline{xyz} > 43 \cdot 24 + 9 = 1041$, άτοπο. Επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3) έχουμε:

$$10 \cdot 13 + 3 \leq 13(x+y+z) + 3 \leq 23 \cdot 13 + 3$$

$$\Rightarrow 133 \leq 13(x+y+z) + 3 \leq 302$$

$$\Rightarrow 133 \leq 99(x-z) \leq 302,$$

οπότε οι δυνατές τιμές για τη διαφορά των δύο ακραίων ψηφίων είναι 2 ή 3.

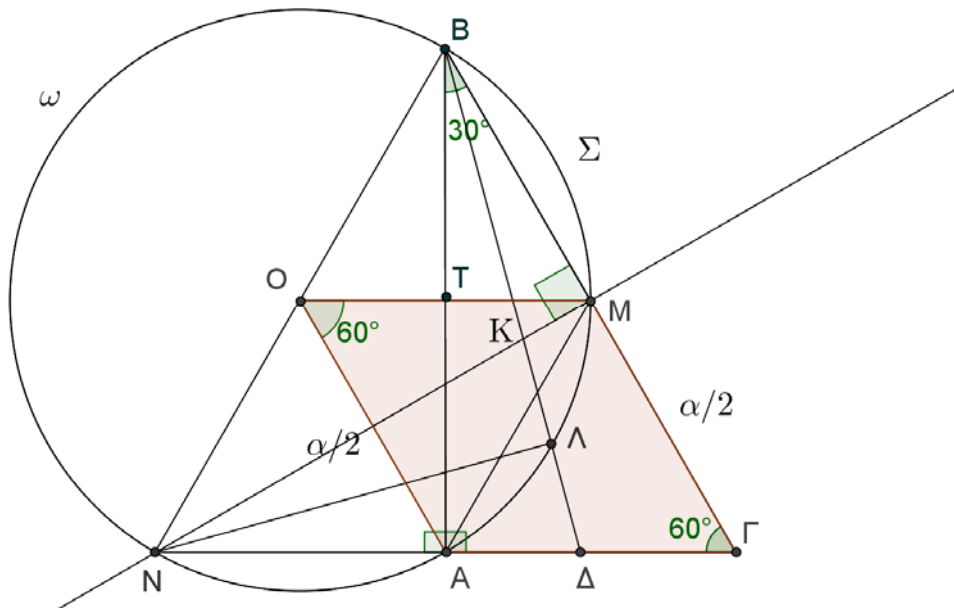
- Για $x-z=2$, από την (3) προκύπτει: $x+y+z=15$ οπότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε $\overline{xyz}=654$ και $\overline{zyx}=456$.
- Για $x-z=3$, από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα των ψηφίων $x+y+z$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ, \hat{\Gamma}=60^\circ$ και υποτείνουσα $B\Gamma=\alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον M της $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο BA (το Δ είναι σημείο της AG) στο σημείο K και την ευθεία AG στο σημείο N . Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $K\Delta$.

1. Να αποδείξετε ότι: $N\Lambda \perp BA$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα BN , ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία A, Λ και M . Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις MG , AG και το τόξο $\widehat{AM}$ του κύκλου ω . Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma=\alpha$.

Σημείωση: Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου ω .



Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες ΚΜ, ΑΓ τέμνονται στο σημείο Ν. Τότε

$$\widehat{N\hat{K}\Delta} = \widehat{B\hat{K}M} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} = 75^\circ.$$

Επίσης η γωνία $\widehat{N\hat{\Delta}K}$ ως εξωτερική του τριγώνου ΔΓΒ ισούται με

$$\widehat{N\hat{\Delta}K} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2} = 60^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Συνεπώς το τρίγωνο ΝΚΔ είναι ισοσκελές με $NK = N\Delta$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης ΚΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΝΚΔ, έπεται ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.

2. Το τρίγωνο ΒΓΝ είναι ισοσκελές με $NG = NB$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο ΒΓΝ είναι ισόπλευρο, οπότε $BN = \alpha$. Οι ΒΑ και ΝΜ είναι ύψη και διάμεσοι αυτού,

οπότε $AG = MG = \frac{\alpha}{2}$. Ο κύκλος διαμέτρου ΒΝ έχει κέντρο, έστω Ο και περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές και έχει

$$\widehat{A\hat{O}M} = 2 \cdot \widehat{A\hat{B}\Gamma} = 2 \cdot (90^\circ - 60^\circ) = 60^\circ.$$

Επίσης $\widehat{A\hat{O}B} = 2 \cdot \widehat{\Gamma\hat{N}B} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $\widehat{M\hat{O}B} = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΟ είναι ρόμβος που αποτελείται

από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος του ΑΤ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$AT = \frac{\frac{\alpha}{2} \sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha \sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου Ε δίνεται από τη σχέση

$$E(\widehat{\Gamma\hat{A}M}) = E(\text{ΑΓΒΟ}) - E_{\kappa.τομέα}(\widehat{O\hat{A}M}). \quad (1)$$

Έχουμε

$$E(\text{ΑΓΜΟ}) = (\text{βάση}) \cdot (\text{ύψος}) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha \sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{8} \quad (2)$$

Επίσης

$$E_{\kappa.τομέα}(\widehat{O\hat{A}M}) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{\pi \alpha^2}{24} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$E(\widehat{\Gamma\hat{A}M}) = E(\text{ΑΓΒΟ}) - E_{\kappa.τομέα}(\widehat{O\hat{A}M}) = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{8} - \frac{\pi \alpha^2}{24} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi) \alpha^2}{24}.$$

Πρόβλημα 1

Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)}.$$

Λύση

$$(α) P(x) = 4(x+4)^2 - 28(x+4) + 48 = 4[(x+4)^2 - 7(x+4) + 12]$$

$$= 4(x^2 + 8x + 16 - 7x - 28 + 12) = 4(x^2 + x) = 4x(x+1).$$

$$(β) A = 6\sqrt{P(-5)} - 4\sqrt{P(4)} = 6\sqrt{-20(-5+1)} - 4\sqrt{16(4+1)} = 6\sqrt{80} - 4\sqrt{80} = 2\sqrt{80} = 8\sqrt{5}$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$x(2x-1)(2x+1) + x = 4x^3, \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$ είναι κύβος ενός ακέραιου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

$$(α) x(2x-1)(2x+1) + x = x(4x^2 - 1) + x = 4x^3 - x + x = 4x^3.$$

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1 = 4031$, $2x+1 = 4033$, οπότε θα είναι $x = 2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό A στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\frac{32256}{2016} = 16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1) + 16x = 64x^3$, οπότε θέτοντας $x = 2016$, έχουμε:

$$A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256 = 64 \cdot 2016^3 = 4^3 \cdot 2016^3 = (4 \cdot 2016)^3 = 8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.

Πρόβλημα 3

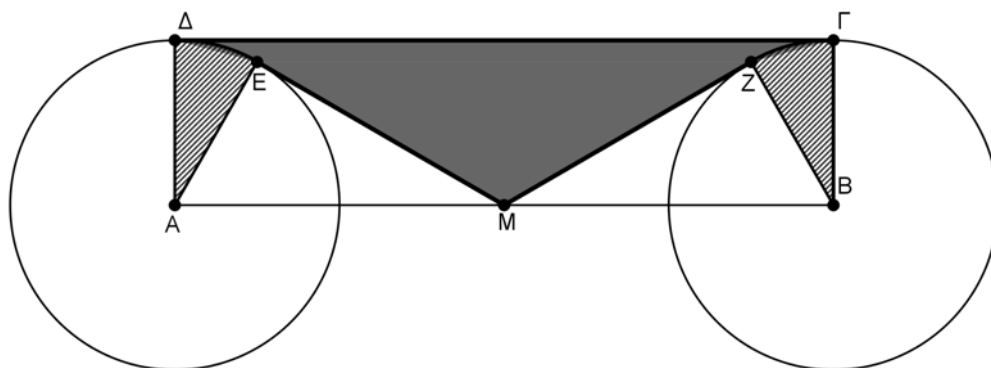
Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $A\Delta = \alpha$ και $AB = 4\alpha$. Με κέντρα τα σημεία A , B και ακτίνα α γράφουμε κύκλους. Το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς AB , η ME είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου A και η MZ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου B , όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta A E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου $\Delta E M Z \Gamma$ που περικλείεται από το τόξο ΔE , τα τμήματα EM, MZ , το τόξο $Z \Gamma$ και το τμήμα $\Gamma \Delta$.

Λύση

(α) Επειδή το M είναι το μέσον του AB θα έχουμε ότι $MA = 2\alpha$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο EAM έχουμε $\eta\mu(\hat{E}MA) = \frac{EA}{AM} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$, οπότε $\hat{E}MA = 30^\circ$, $\hat{E}AM = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ και συνεπώς $\hat{E}A\Delta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



(β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει, αν από το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδό των τριγώνων ΕΑΜ, ΜΖΒ και αφαιρέσουμε και τους κυκλικούς τομείς ΔΑΕ, ΖΒΓ.

$$\text{Προφανώς } (ΑΒΓΔ) = \alpha \cdot 4\alpha = 4\alpha^2$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $ΕΜ^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow ΕΜ = \alpha\sqrt{3}$, οπότε

$$(ΕΑΜ) = \frac{1}{2} ΕΑ \cdot ΕΜ = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{2}, \quad \text{και όμοια } (ΒΖΜ) = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{2}. \quad \text{Επιπλέον, ομοίως με το}$$

ερώτημα (α) υπολογίζουμε ότι $\hat{ΖΒΓ} = 30^\circ$, οπότε έχουμε

$$\text{εμβτομέα}(ΔΑΕ) = \text{εμβτομέα}(ΖΒΓ) = \frac{\pi\alpha^2}{12}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\text{εμβγραμ. χωρίου}(ΔΕΜΖΓ) = 4\alpha^2 - 2 \cdot \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{2} - 2 \frac{\pi\alpha^2}{12} = \alpha^2 \left(4 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right).$$

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση.

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη

$\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4} + \frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{12}\right) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha = 5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5 \cdot 4 = 20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta = 36$. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20 + 36 = 56$.

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}, \beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^3, \gamma = -\frac{27}{16}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}, \beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}, \gamma = -\frac{27}{16},$$

οπότε οι δύο όροι του A γίνονται:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= \left(\frac{81}{16}\right)^3 + \left(-\frac{27}{8}\right)^3 + \left(-\frac{27}{16}\right)^3 = \left(\frac{3^4}{2^4}\right)^3 + \left(-\frac{3^3}{2^3}\right)^3 + \left(-\frac{3^3}{2^4}\right)^3 \\ &= \frac{3^{12}}{2^{12}} - \frac{3^9}{2^9} - \frac{3^9}{2^{12}} = \frac{3^{12}}{2^{12}} - \frac{2^3 \cdot 3^9}{2^{12}} - \frac{3^9}{2^{12}} = \frac{3^{12} - 2^3 \cdot 3^9 - 3^9}{2^{12}} \\ &= \frac{3^9 \cdot (3^3 - 2^3 - 1)}{2^{12}} = \frac{3^9 \cdot (27 - 8 - 1)}{2^{12}} = \frac{3^9 \cdot 18}{2^{12}} = \frac{3^9 \cdot 3^2 \cdot 2}{2^{12}} = \frac{3^{11}}{2^{11}}, \\ \alpha\beta\gamma &= \frac{81}{16} \cdot \left(-\frac{27}{8}\right) \cdot \left(-\frac{27}{16}\right) = \frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{3^3}{2^3} \cdot \frac{3^3}{2^4} = \frac{3^{10}}{2^{11}} \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$A = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{3^{11}}{2^{11}}}{\frac{3^{10}}{2^{11}}} = \frac{3^{11} \cdot 2^{11}}{3^{10} \cdot 2^{11}} = 3$$

Πρόβλημα 2

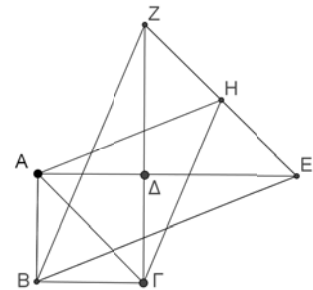
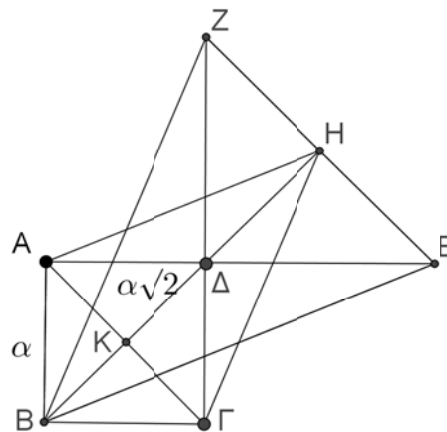
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΒΔ. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:

(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.

(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.

Σημείωση: Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.

**Λύση**

Σχήμα 1

(α) Από την υπόθεση έχουμε: $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = \alpha$ και $B\Delta = \Delta E = \Delta Z = \alpha\sqrt{2}$.
Τότε είναι $AE = \alpha + \alpha\sqrt{2}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$BE = \sqrt{(\alpha + \alpha\sqrt{2})^2 + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2(4 + 2\sqrt{2})} = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

(β) Επειδή H είναι το μέσο της βάσης EZ του τριγώνου ΔEZ η ευθεία ΔH θα είναι μεσοκάθετη της βάσης. Το τρίγωνο ΔZE είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Delta E = \Delta Z = \alpha\sqrt{2}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι:

$$EZ = \sqrt{E\Delta^2 + \Delta Z^2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha^2} = 2\alpha.$$

Όμως και το τρίγωνο ΔHE είναι ορθογώνιο ισοσκελές, (ΔH κάθετη στη βάση EZ και $\hat{\Delta EH} = 45^\circ$), οπότε ότι: $\Delta H = HE = \frac{EZ}{2} = \alpha$. Έτσι έχουμε $\Delta H = \alpha = \Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε το Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.

(γ) Η ευθεία BH είναι μεσοκάθετη της διαγωνίου ΑΓ και έστω ότι την τέμνει στο σημείο Κ. Ομοίως όπως στο ερώτημα (α), μπορούμε να βρούμε ότι:

$$BZ = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = BE.$$

Επομένως και το σημείο Β ανήκει στη μεσοκάθετη του EZ, οπότε τα σημεία Β, Δ και Η είναι συνευθειακά. Τότε είναι

$$KH = K\Delta + \Delta H = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \alpha = \frac{\alpha(2 + \sqrt{2})}{2}, BH = B\Delta + \Delta H = \alpha\sqrt{2} + \alpha, A\Gamma = \alpha\sqrt{2},$$

Επομένως, έχουμε

$$E(\text{ΑΓΗ}) = \frac{1}{2} \cdot \alpha\sqrt{2} \cdot \frac{\alpha(2 + \sqrt{2})}{2} = \frac{\alpha^2(1 + \sqrt{2})}{2},$$

$$E(\text{ΒΕΖ}) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot (\alpha + \alpha\sqrt{2}) = \alpha^2(1 + \sqrt{2}),$$

οπότε ο ζητούμενος λόγος εμβαδών είναι: $\frac{E(\text{ΒΕΖ})}{E(\text{ΑΓΗ})} = 2$.

Πρόβλημα 3

(α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .

(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5 .

Λύση

(α) Τα πολλαπλάσια του 9 μεταξύ 1 και $10^5 = 100000$ είναι της μορφής $9x$, όπου x θετικός ακέραιος. Έχουμε

$$1 < 9x < 100000 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < \frac{100000}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < 11111 + \frac{1}{9} \Leftrightarrow x \in \{1, 2, \dots, 11111\},$$

αφού ο x είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9.

(β) Βρήκαμε στο ερώτημα (α) ότι μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9. Ομοίως βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 16666

πολλαπλάσια του 6. Από τα παραπάνω πολλαπλάσια, μετριοούνται δύο φορές αυτά που είναι κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Αυτά είναι τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ(6,9) = 18. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 5555 πολλαπλάσια του 18. Επομένως μεταξύ των αριθμών 1 και 100000 υπάρχουν

$$11111 + 16666 - 5555 = 27777 - 5555 = 22222$$

πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9.

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, βλέπει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω x τα χιλιόμετρα είναι η απόσταση από το σπίτι στο σχολείο.

Με τα πόδια ο Γιώργος κάνει τη διαδρομή σε $\frac{x}{6}$ ώρες. Αν συνεχίσει την αρχική

πορεία του, αφού έχει διανύσει τα $\frac{\alpha}{100}$ θα χρειαστεί ακόμη

$$\frac{x}{6} - \frac{\alpha}{100} \cdot \frac{x}{6} = \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \frac{x}{6} \text{ ώρες}$$

για να φθάσει στο σχολείο.

Αν επιστρέψει να πάρει το ποδήλατο, θα χρειαστεί $\frac{\alpha}{100} \cdot \frac{x}{6}$ ώρες να φθάσει στο

σημείο που ξεκίνησε και στη συνέχεια θα χρειαστεί άλλες $\frac{x}{15}$ ώρες για να φθάσει

στο σχολείο του. Άρα ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί θα είναι:

$$\frac{\alpha x}{600} + \frac{x}{15} = \left(\frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15}\right) \cdot x \text{ ώρες.}$$

Για να τον συμφέρει η χρησιμοποίηση του ποδηλάτου πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15}\right) \cdot x &\leq \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \frac{x}{6} \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \cdot \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{600} + \frac{1}{15} &\leq \frac{100 - \alpha}{600} \Leftrightarrow \alpha + 40 \leq 100 - \alpha \Leftrightarrow 2\alpha \leq 60 \Leftrightarrow \alpha \leq 30. \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος αποφάσισε να επιστρέψει σπίτι όταν είχε καλύψει x χιλιόμετρα και ότι από εκείνο το σημείο ως το σχολείο η απόσταση είναι y χιλιόμετρα. Επομένως, αν συνέχιζε το περπάτημα, για να φτάσει στο σχολείο ήθελε ακόμη χρόνο $\frac{y}{6}$ (απόσταση προς ταχύτητα). Ενώ τελικά έκανε χρόνο $\frac{x}{6}$

μέχρι να γυρίσει ξανά στο σπίτι και επιπλέον $\frac{x+y}{15}$ μέχρι να φτάσει από το σπίτι στο σχολείο με το ποδήλατο, δηλαδή ο χρόνος που έκανε συνολικά είναι

$\frac{x}{6} + \frac{x+y}{15}$. Για να τον συμφέρει αυτό, θα πρέπει αυτός ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο που χρειαζόταν αν συνέχιζε με τα πόδια, δηλαδή η επιλογή του ήταν καλή αν

$$\frac{x}{6} + \frac{x+y}{15} \leq \frac{y}{6} \Leftrightarrow 5x + 2(x+y) \leq 5y \Leftrightarrow 7x \leq 3y \Leftrightarrow 10x \leq 3x + 3y \Leftrightarrow \frac{x}{x+y} \leq \frac{3}{10},$$

δηλαδή αν το ποσοστό είναι μικρότερο ή ίσο του 30%.

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma = -\frac{18}{2^3}$, $\delta = \frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, $\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$, $\gamma = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}$, $\delta = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{81}{16} + \frac{1}{64} = \frac{325}{64}, \quad \gamma^2 + \delta^2 = \left(-\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{81}{16} + \frac{1}{64} = \frac{325}{64},$$

$$\alpha\gamma + \beta\delta = \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{8} = -\frac{81}{16} - \frac{1}{64} = -\frac{325}{64} \Rightarrow (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 = \left(-\frac{325}{64}\right)^2.$$

Άρα έχουμε: $A = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 = \frac{325}{64} \cdot \frac{325}{64} - \left(-\frac{325}{64}\right)^2 = 0.$

2ος Τρόπος

$$\begin{aligned} A &= (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 = \\ &= \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta - \beta^2\delta^2 = \\ &= \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2. \end{aligned}$$

Άρα είναι:

$$A = \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{8}\right)^2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα α εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ίδιας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Λύση

Έχουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

Η μία ομάδα = α εργάτες τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας

Πόσοι εργάτες (έστω x) τελειώνουν 15 έργα σε 5 ημέρες;

Επειδή τα ποσά: **εργάτες – έργο, είναι ανάλογα**, ενώ τα ποσά: **εργάτες – ημέρες, είναι αντιστρόφως ανάλογα**, έχουμε ότι:

$$x = \alpha \cdot \frac{15}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{5} = \alpha \cdot 60 \cdot \frac{1}{15} = 4\alpha.$$

Επομένως θα χρειαστούν 4 τέτοιες ομάδες εργατών.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{P(x) - P(y)}{x - y} \text{ είναι θετικός ακέραιος.}$$

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

(α) Έχουμε ότι $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c = ax^2 + (b+4a)x + 4a + 3b + c$

Επομένως

$$P(x) - P(y) = a(x^2 - y^2) + (b+4a)(x-y) = (x-y)(a(x+y) + b+4a),$$

οπότε

$$\frac{P(x) - P(y)}{x - y} = \frac{(x-y)(a(x+y) + b+4a)}{x-y} = a(x+y) + b+4a$$

που είναι θετικός ακέραιος, αφού οι αριθμοί a, b, c, x, y είναι θετικοί ακέραιοι.

(β) Από το πρώτο ερώτημα, για $x = 2018, y = 8$ έχουμε ότι

$$\frac{P(2018) - P(8)}{2010} = \kappa \text{ ακέραιος,}$$

δηλαδή

$$P(2018) - P(8) = 2010\kappa, \text{ όπου } \kappa \text{ ακέραιος} \Rightarrow P(2018) = P(8) + 2010\kappa, \text{ όπου } \kappa \text{ ακέραιος}$$

Όμως το $2010 = 3 \cdot 670$ είναι πολλαπλάσιο του 3, όπως και το $P(8)$ από την υπόθεση, οπότε και το $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{A} = 72^\circ$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και E το συμμετρικό του A ως προς την $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι η ΓE περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Σημείωση: Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Λύση

Θεωρούμε το ύψος από την κορυφή A που τέμνει τη ΓE στο σημείο O . Θα αποδείξουμε ότι το O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$, δηλαδή ότι $OA = OB = O\Gamma$.

Το ύψος από την κορυφή A είναι και μεσοκάθετος της $B\Gamma$, άρα το O ως σημείο της θα ισαπέχει από τα B, Γ , δηλαδή $OB = O\Gamma$.

Επιπλέον το E το συμμετρικό του A ως προς την $\Gamma\Delta$, το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{\Gamma E A} = 72^\circ$, οπότε $\widehat{E \Gamma A} = 36^\circ$ (1). Επειδή όμως η AO είναι ύψος και διχοτόμος, θα ισχύει ότι $\widehat{O A \Gamma} = 36^\circ$, οπότε λόγω της (1) θα ισχύει $OA = O\Gamma$.

