

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Δίνεται η αριθμητική παράσταση

$$A = \left[ \frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5} \right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300}$$

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης A ως δύναμη με βάση το 2.

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5} \right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300} \\ &= \left[ \left( \frac{-8}{-2} \right)^{10} + 3 \cdot \frac{(2^5)^6}{(2^2)^5} \right]^{100} : (144 - 16)^{300} \\ &= \left[ 4^{10} + 3 \cdot \frac{2^{30}}{2^{10}} \right]^{100} : 128^{300} = [(2^2)^{10} + 3 \cdot 2^{20}]^{100} : (2^7)^{300} \\ &= [2^{20} + 3 \cdot 2^{20}]^{100} : (2^7)^{300} = (4 \cdot 2^{20})^{100} : (2^7)^{300} \\ &= (2^2 \cdot 2^{20})^{100} : (2^7)^{300} \\ &= (2^{22})^{100} : (2^7)^{300} = 2^{2200} \cdot 2^{2100} = 2^{100}. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2.** Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος  $A = \overline{2023xy}$ , όπου  $x, y$  ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Να προσδιορίσετε τα ψηφία  $x, y$  έτσι ώστε ο αριθμός A να διαιρείται με τον αριθμό 17.

**Λύση**

Έχουμε:

$$A = 2023xy = 202300 + 10x + y = 17 \cdot 11900 + 10x + y,$$

οπότε για να διαιρείται ο αριθμός A με το 17 αρκεί ο αριθμός  $\overline{xy} = 10x + y$  να διαιρείται με το 17, δηλαδή αρκεί  $\overline{xy} = 10x + y \in \{17, 34, 51, 68, 85\}$ .

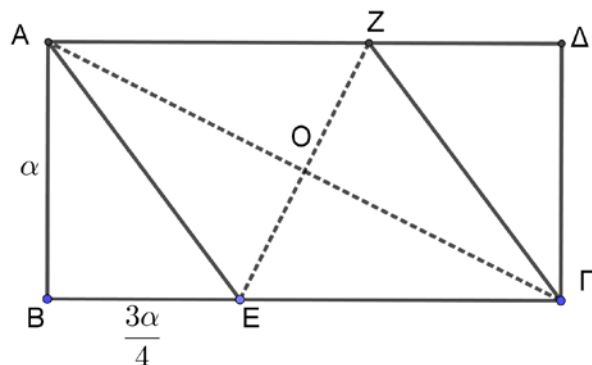
Άρα οι λύσεις είναι τα ζεύγη:

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 7), (3, 4), (5, 1), (6, 8), (8, 5)\}.$$

**Πρόβλημα 3.** Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενό τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός (από τους αρχικούς 7) που διαιρείται με το 10.

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν 4 περιττοί αριθμοί, γιατί τότε το 10 δεν θα διαιρούσε το γινόμενό τους. Επομένως οι περιττοί αριθμοί είναι το πολύ τρεις. Άρα οι άρτιοι είναι τουλάχιστον τέσσερεις. Ομοίως, δεν να υπάρχουν 4 αριθμοί που να μην διαιρούνται με το 5, γιατί τότε το γινόμενό τους δεν διαιρείται με το 10. Συνεπώς υπάρχουν το πολύ 3 αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 5, άρα τα πολλαπλάσια του 2 είναι τουλάχιστον 4. Τελικά εφόσον υπάρχουν 7 αριθμοί, υπάρχει κάποιος που είναι πολλαπλάσιο και του 2 και του 5, άρα πολλαπλάσιο του 10.

#### Πρόβλημα 4.



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο με  $AB = \alpha$ ,  $B\Gamma = 2\alpha$ . Οι ευθείες AE και ΓZ είναι παράλληλες και  $BE = \frac{3\alpha}{4}$ . Να αποδείξετε ότι:

- (α)  $AE = AZ$ .
- (β) Η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ABΓΔ περνάει από το Ο που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΖΕ.
- (γ)  $ΑΓ = 2 \cdot ΕΖ$ .

**Σημείωση:** Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.

#### Λύση

(α) Επειδή ABΓΔ ορθογώνιο έπεται ότι  $B\Gamma \parallel A\Delta$ , οπότε θα είναι και  $E\Gamma \parallel AZ$ . Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι  $AE \parallel \Gamma Z$ . Επομένως το τετράπλευρο AΕΓZ είναι παραλληλόγραμμο.

Από την υπόθεση έχουμε:

$$E\Gamma = 2\alpha - \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\alpha}{4}. \quad (1)$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABE προκύπτει:

$$AE^2 = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{16}} = \sqrt{\frac{25\alpha^2}{16}} \Rightarrow AE = \frac{5\alpha}{4}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι:  $AE = E\Gamma$ , οπότε το παραλληλόγραμμο AΕΓZ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και άρα είναι ρόμβος.

(β) Το ορθογώνιο ABΓΔ και το παραλληλόγραμμο AΕΓZ έχουν κοινή τη διαγώνιο ΑΓ. Επομένως η άλλη διαγώνιος εκάστου από αυτά θα περνάει από το μέσο της ΑΓ.

(γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = \sqrt{AB^2 + B\Gamma^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2} \Rightarrow ΑΓ = \alpha\sqrt{5}. \quad (3)$$

Για το εμβαδό του ρόμβου έχουμε:

$$E_{AΕΓZ} = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΕΖ = AB \cdot E\Gamma \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \cdot ΕΖ = \alpha \cdot \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow ΕΖ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:  $ΑΓ = 2 \cdot ΕΖ$