



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"**  
**8 Νοεμβρίου 2024**  
**Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1 ( 6 μονάδες )**

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left( \left( -\frac{99}{9} \right)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2} \right) \cdot (-2024)^0 - 118 - \frac{2}{21},$$

$$B = \frac{(-20)^8}{4^8} - \left( -\frac{1}{5} \right)^{-8} - \frac{3}{32}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

**Πρόβλημα 2 ( 6 μονάδες )**

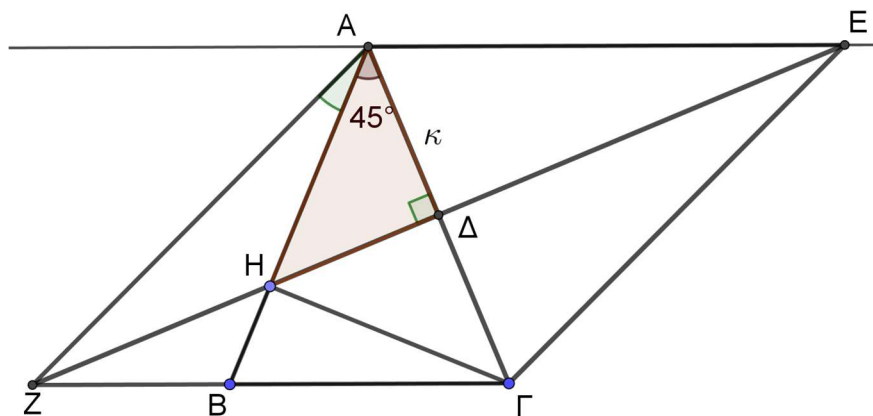
Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους  $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$  που είναι εικοσαπλάσιοι του αθροίσματος των ψηφίων τους.

**Πρόβλημα 3 ( 8 μονάδες )**

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με  $AB = AG$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ . Το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς AG. Η μεσοκάθετη της πλευράς AG τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο A προς την ευθεία BΓ στο σημείο E, την πλευρά AB στο σημείο H και την ευθεία BΓ στο σημείο Z.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία ZĀB.

(β) Αν  $AD = \kappa$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου AZΓE συναρτήσει του κ.



## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

### Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left( \left( -\frac{99}{9} \right)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2} \right) \cdot (-2024)^0 - 118 - \frac{2}{21},$$

$$B = \frac{(-20)^8}{4^8} - \left( -\frac{1}{5} \right)^{-8} - \frac{3}{32}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

### Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left( \left( -\frac{99}{9} \right)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2} \right) \cdot (-2024)^0 - 118 - \frac{2}{21} \\ &= \left( (-11)^2 + \frac{-3^5}{9^2} \right) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} = \left( (-11)^2 - \frac{3^4 \cdot 3}{9^2} \right) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} \\ &= (121 - 3) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} = -\frac{2}{21}. \end{aligned}$$

$$B = \frac{(-20)^8}{4^8} - \left( -\frac{1}{5} \right)^{-8} - \frac{3}{32} = \left( \frac{-20}{4} \right)^8 - (-5)^8 - \frac{3}{32} = 5^8 - 5^8 - \frac{3}{32} = -\frac{3}{32}.$$

Θεωρούμε τη διαφορά A - B:

$$A - B = -\frac{2}{21} - \left( -\frac{3}{32} \right) = \frac{3}{32} - \frac{2}{21} = \frac{63 - 64}{672} = -\frac{1}{672} < 0 \Rightarrow A < B.$$

### Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους  $\overline{a\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$  που είναι εικοσαπλάσιοι του αθροίσματος των ψηφίων τους.

### Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει να είναι  $0 < \alpha \leq 9$  και ισχύει η εξίσωση

$$\overline{a\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma = 20(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow 80\alpha - 10\beta = 19\gamma$$

$$\Leftrightarrow 10(8\alpha - \beta) = 19\gamma.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος  $19\gamma$  είναι πολλαπλάσιο του 10, οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το ψηφίο  $\gamma$  είναι η τιμή  $\gamma = 0$ . Τότε θα είναι  $8\alpha - \beta = 0$ , από την οποία προκύπτει ότι  $\beta = 8\alpha$ , οπότε  $\alpha = 1$  και  $\beta = 8$ , αφού  $0 < \beta \leq 9$ . Άρα  $\overline{a\beta\gamma} = 180$ .

### (2ος τρόπος)

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 20, οπότε λήγουν σε 0. Το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα των ψηφίων ενός τέτοιου αριθμού είναι  $9+8=17$ , για τον 980, οπότε οποιοσδήποτε υποψήφιος αριθμός μεγαλύτερος του 340 απορρίπτεται, αφού όταν

διαιρεθεί με το 20 δίνει πηλίκο μεγαλύτερο του  $340/20=17$ . Οι ζητούμενοι αριθμοί, λοιπόν, είναι ανάμεσα στους παρακάτω δεκατρείς αριθμούς:

100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340.

Το μικρότερο δυνατό άθροισμα των ψηφίων ενός τέτοιου αριθμού είναι μεγαλύτερο από  $100/20=5$ . Οπότε απομένουν οι εξής έξι αριθμοί:

160, 180, 240, 260, 280 και 340.

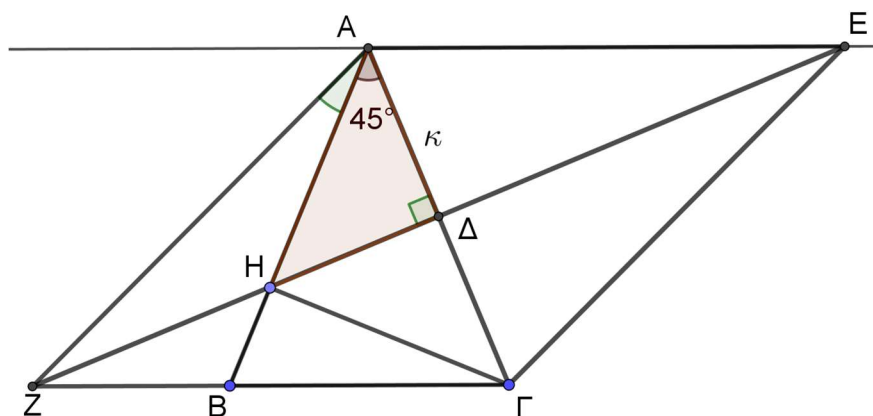
Εύκολα βλέπουμε ότι μόνο ο αριθμός 180 ισούται με το 20πλασιο του αθροίσματος των ψηφίων του.

### Πρόβλημα 3

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ . Το σημείο  $\Delta$  είναι το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ . Η μεσοκάθετη της πλευράς  $A\Gamma$  τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο  $A$  προς την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ , την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $H$  και την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ .

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{ZAB}$ .

(β) Αν  $A\Delta = \kappa$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AZ\Gamma E$  συναρτήσει του  $\kappa$ .



### Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ , έπεται ότι

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}Z = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

Επειδή η ευθεία  $ZE$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $A\Gamma$ , έπεται ότι το τρίγωνο  $ZA\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $ZA = Z\Gamma$ , οπότε θα είναι και

$$\hat{A}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Gamma}\hat{A}Z = \hat{A} + \hat{ZAB} \Rightarrow \hat{ZAB} = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ.$$

(β) Το τρίγωνο  $AH\Delta$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε  $H\Delta = A\Delta = \kappa$  και από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$AH^2 = \kappa^2 + \kappa^2 = 2\kappa^2 \Rightarrow AH = \kappa\sqrt{2}.$$

Επειδή η γωνία  $\hat{A}\hat{H}\Delta = 45^\circ$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο  $AH\Delta$  έχουμε

$$\widehat{A\hat{H}\Delta} = \widehat{Z\hat{A}H} + \widehat{H\hat{Z}A} \Rightarrow \widehat{H\hat{Z}A} = \widehat{A\hat{H}\Delta} - \widehat{Z\hat{A}H} = 45^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ.$$

Άρα το τρίγωνο  $AHZ$  είναι ισοσκελές με  $ZH = AH = x\sqrt{2}$ , οπότε  $Z\Delta = \kappa + \kappa\sqrt{2}$ .

Επειδή  $AE \parallel Z\Gamma$  έχουμε

$$\widehat{\Gamma\hat{Z}E} = \widehat{A\hat{E}Z} \quad (\text{εντός εναλλάξ})$$

Επίσης λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη  $ZE$  της  $A\Gamma$  έχουμε

$$\widehat{\Gamma\hat{Z}E} = \widehat{A\hat{Z}E}.$$

Άρα είναι  $\widehat{A\hat{Z}E} = \widehat{A\hat{E}Z}$ , οπότε το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισοσκελές με  $AZ = AE$ , οπότε τελικά είναι  $AZ = AE = \Gamma E = \Gamma Z$  και επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα  $AZ\Gamma$  και  $AE\Gamma$  έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (η πλευρά  $A\Gamma$  είναι κοινή), οπότε είναι ίσα.

Επομένως το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AZ\Gamma E$  είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου  $AZ\Gamma$ . Επειδή  $A\Gamma = 2x$ ,  $Z\Delta = \kappa + \kappa\sqrt{2}$ , έχουμε:

$$(AZ\Gamma E) = 2 \cdot (AZ\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\kappa \cdot (\kappa + \kappa\sqrt{2}) = 2\kappa^2(1 + \sqrt{2}).$$