

Πώς και γιατί παραγοντοποιώ;

Αρδαβάνη Καλλιόπη – Μάλλιαρης Χρήστος

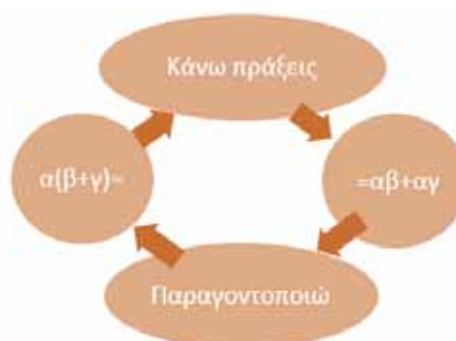


«Σκίτσο: Ευθυμίουπουλος Παναγιώτης»

ΠΩΣ εργάζομαι όταν θέλω να κάνω πράξεις και **ΠΩΣ** για να παραγοντοποιήσω μία αλγεβρική παράσταση;

Κάνω πράξεις με την επιμεριστική ιδιότητα ή με μία ταυτότητα σημαίνει ότι	$a(b + \gamma) = a\beta + a\gamma$ $(a+\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$ εκτελώ τους πολλαπλασιασμούς
Κάνω παραγοντοποίηση με την επιμεριστική ιδιότητα ή με μία ταυτότητα σημαίνει ότι	$a\beta + a\gamma = a(\beta + \gamma)$ $a^2 + 2a\beta + \beta^2 = (a+\beta)^2$ μετατρέπω την παράσταση σε γινόμενο παραγόντων

Παρατήρησε προσεκτικά τα δύο μέλη της επιμεριστικής ιδιότητας :



ΠΩΣ παραγοντοποιώ; ΠΟΙΕΣ μεθόδους ακολουθώ;

Για να παραγοντοποιήσουμε μία αλγεβρική παράσταση σκεφτόμαστε τα παρακάτω:

Βγάζω από όλους τους όρους κοινό παράγοντα με την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha \beta + \alpha \gamma = \alpha (\beta + \gamma)$ <u>Προσοχή:</u> $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$ και $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$	$3\alpha + 6\beta = 3(\alpha + 2\beta)$ $8\chi^2\psi - 4\chi\psi^2 = 4\chi\psi (2\chi - \psi)$ $2(\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(2 - \alpha - \beta)$ $(\chi - \psi)^2 + 3(\psi - \chi) = (\psi - \chi)^2 + 3(\psi - \chi) = (\psi - \chi)(\psi - \chi + 3)$ ή $(\chi - \psi)^2 + 3(\psi - \chi) = (\chi - \psi)^2 - 3(\chi - \psi) = (\chi - \psi)(\chi - \psi - 3)$
Κοιτάζω αν όλη η παράσταση είναι μία ταυτότητα στην ανηγμένη της μορφή και την γράφω σε μορφή γινομένου π.χ. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3$ κ.λ.π.	$(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta) + 1 = (\alpha + \beta - 1)^2$ $9 - 6\alpha + \alpha^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \alpha + \alpha^2 = (3 - \alpha)^2 = (\alpha - 3)^2$ $16\chi^6 + 16\chi^3 + 4 = (4\chi^3)^2 + 2 \cdot 4\chi^3 \cdot 2 + 2^2 = (4\chi^3 + 2)^2$ $(\chi - \psi) \cdot (\chi + \psi) = \chi^2 - \psi^2$ $(-\chi + \psi) \cdot (\chi + \psi) = \psi^2 - \chi^2$ $3\chi^2 - 27 = 3(\chi^2 - 9) = 3(\chi - 3) \cdot (\chi + 3)$ $9\chi^2 - (2\chi + 1)^2 = (3\chi)^2 - (2\chi + 1)^2 = (\chi - 1) \cdot (5\chi + 1)$ $\chi^4 - 4\chi^2\psi + 2 = \chi^2(\chi - 2\psi) \cdot (\chi + 2\psi)$ $(\chi + 2\psi)^2 - \chi^2 = (\chi + 2\psi - \chi) \cdot (\chi + 2\psi + \chi) = 4\psi \cdot (\chi + \psi)$
Εξετάζω αν μπορώ να πάρω κοινό παράγοντα με ομάδες	$2\chi^3 - 2\chi^2 + 3\chi - 3 = 2\chi^2(\chi - 1) + 3(\chi - 1) = (\chi - 1) \cdot (2\chi^2 + 3)$ $2(\alpha - \beta)^2 - \alpha + \beta = 2(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) \cdot (2\alpha - 2\beta - 1)$
Κοιτάζω αν έχω συνδυασμό ομάδων και ταυτοτήτων	$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2 = (\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 = (\alpha - \beta - \gamma) \cdot (\alpha - \beta + \gamma)$ $\psi^2 - \chi^2 - 10\psi + 25 = (\psi - 5)^2 - \chi^2 = (\psi - 5 - \chi) \cdot (\psi - 5 + \chi)$ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta = (\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta - 1)$
Αν έχω ένα τριώνυμο με προσθαφαίρεση	$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = \alpha^2 - 3 \cdot \alpha \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \frac{9}{4} = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (\alpha - 2) \cdot (\alpha - 1)$
Αν μπορώ να κάνω Διάσπαση με σκοπό να πάρω ομάδες	$\chi^2 - 5\chi + 4 = \chi^2 - \chi - 4\chi + 4 = \chi(\chi - 1) - 4(\chi - 1) = (\chi - 1)(\chi - 4)$ αφού $-5\chi = -\chi - 4\chi$ $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = \alpha^2 - 2\alpha - \alpha + 2 = \alpha \cdot (\alpha - 2) - (\alpha - 2) = (\alpha - 2) \cdot (\alpha - 1)$
Αν δεν βλέπω Τίποτα από τα παραπάνω	$(\alpha - \beta)^3 - (\alpha + \beta)^3 =$ $= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 - \alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3 =$ $= -6\alpha^2\beta - 2\beta^3 = -2\beta \cdot (3\alpha^2 + \beta^2)$ Κάνω πράξεις και παραγοντοποιώ τη νέα παράσταση

Ασκήσεις παραγοντοποίησης για εξάσκηση και οι απαντήσεις:

1. $(\chi - \psi) \cdot (\chi - \psi) = (\chi - \psi)^2$ γιατί;
2. $(\chi - \psi) \cdot (-\chi + \psi) = -(\chi - \psi)^2$ γιατί;
3. $(\chi - \psi)^3 \cdot (\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2) = (\chi - \psi)^5$ γιατί;
4. $(\chi - \psi)^3 - (\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2) = (\chi - \psi)^2 \cdot (\chi - \psi - 1)$ γιατί;
5. $\psi^2 + 2\chi - \chi^2 - 1 = (\psi - \chi + 1) \cdot (\psi + \chi - 1)$ γιατί;
6. $(\chi^3 - 4\chi^2 + 4\chi) \cdot (\chi^2 - \chi) = \chi^2 \cdot (\chi - 1) \cdot (\chi - 2)^2$
7. $\chi^8 - \psi^8 = (\chi^4 + \psi^4) (\chi^2 + \psi^2) \cdot (\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi)$ γιατί;
8. $(\alpha - \beta)^3 - \alpha + \beta = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta - 1) \cdot (\alpha - \beta + 1)$ γιατί;
9. $2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) - 8\alpha^2\beta^2 = 2(\alpha - \beta - \gamma) \cdot (\alpha - \beta + \gamma) \cdot (\alpha + \beta - \gamma) \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$ γιατί;
10. $(\chi^2 - 81) + (\chi + 9)^2 = 2\chi \cdot (\chi + 9)$ γιατί;
11. $(\chi^2 - 81) - (\chi + 9)^2 = -18(\chi + 9)$ γιατί;
12. $\chi^3 - 3\chi + 2 = (\chi - 1)^2 \cdot (\chi + 2)$ γιατί;

ΓΙΑΤΙ Παραγοντοποιώ; Μερικά παραδείγματα:

1. Για να βρω τον Μ.Κ.Δ αλγεβρικών παραστάσεων

$$\text{Μ.Κ.Δ} (\alpha^2 - 3\alpha + 2, \alpha^2 - 2\alpha + 1, \alpha^3 - \alpha) = \text{Μ.Κ.Δ} [(\alpha - 2) \cdot (\alpha - 1), (\alpha - 1)^2, \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1)] = \alpha - 1$$

2. Για να βρω το Ε.Κ.Π αλγεβρικών παραστάσεων

$$\text{Ε.Κ.Π} (\alpha^2 - 3\alpha + 2, \alpha^2 - 2\alpha + 1, \alpha^3 - \alpha) = \text{Ε.Κ.Π} [(\alpha - 2) \cdot (\alpha - 1), (\alpha - 1)^2, \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1)] = \alpha(\alpha - 1)^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha - 2)$$

3. Για να απλοποιήσω ένα κλάσμα

$$\frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{\alpha^3 - \alpha} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha - 1)}{\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 + \alpha} \quad \alpha \neq -1, 0, 1$$

4. Για να βρω άθροισμα κλασμάτων

$$\frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + 2} - \frac{1}{\alpha^2 - 4\alpha + 4} = \frac{1}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)} - \frac{1}{(\alpha - 2)^2} = \frac{(\alpha - 2) - (\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)^2} = \frac{-1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)^2}$$

5. Για να πολλαπλασιάσω κλάσματα

$$\frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{\alpha - 2} \cdot \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{\alpha^3 - \alpha} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha - 1)}{\alpha - 2} \cdot \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \quad \alpha \neq -1, 0, 1, 2$$

6. Για να λύσω μία εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του 2 ή κλασματική

$$\chi^8 - 1 = 0 \text{ άρα } (\chi^4 + 1) \cdot (\chi^2 + 1) \cdot (\chi + 1) \cdot (\chi - 1) = 0 \text{ άρα } \chi = 1 \text{ ή } \chi = -1$$

$$\frac{4\chi}{\chi^2 - 9} + \frac{3}{\chi + 3} = -\frac{1}{3 - \chi} \text{ άρα } \frac{4\chi}{(\chi - 3)(\chi + 3)} + \frac{3}{\chi + 3} = \frac{1}{\chi - 3}, \text{ Ε.Κ.Π} = (\chi - 3) \cdot (\chi + 3),$$

άρα $4\chi+3(\chi-3)=\chi+3$ άρα $\chi=2$, δεκτή

αφού πρέπει $\chi \neq 3$ και $\chi \neq -3$

7. Για να κάνω νοερά πράξεις

$$29^2 - 21^2 = (29+21) \cdot (29-21) = 40 \cdot 8 = 320$$

$$1,6^2 + 3,2 \cdot 8,4 + 8,4^2 = 1,6^2 + 2 \cdot 1,6 \cdot 8,4 + 8,4^2 = (1,6+8,4)^2 = 100$$

Να υπολογίσετε νοερά τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

$$992^2 + 16 \cdot 992 + 64 =$$

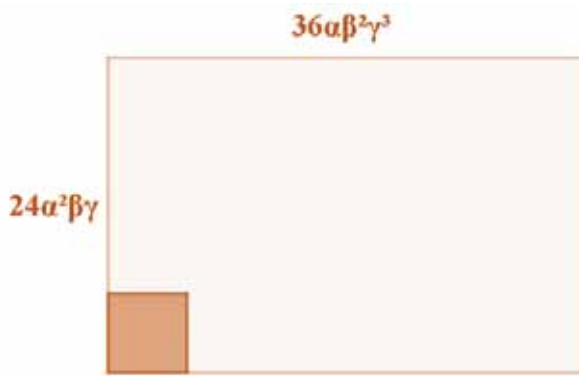
$$0,58^2 + 0,42^2 + 0,58 \cdot 0,84 =$$

$$6001 \cdot 5999 =$$

$$8005^2 - 7995^2 =$$

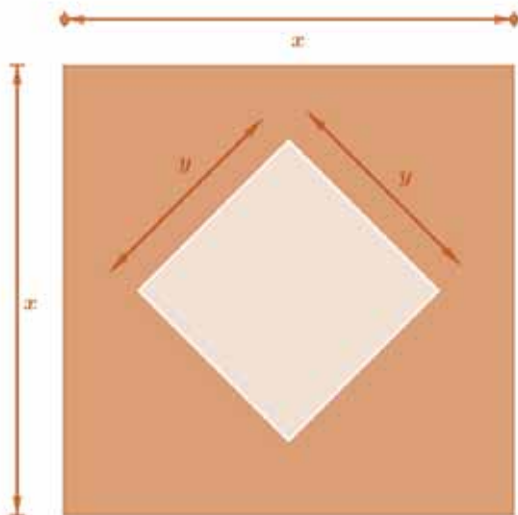
Πρόβλημα 1:

Θέλουμε να καλύψουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει διαστάσεις $24a^2b\gamma$ και $36a\beta^2\gamma^3$, με ίσα τετράγωνα.



1. Να βρείτε την πλευρά των μεγαλύτερων ίσων τετραγώνων που καλύπτουν το ορθογώνιο.
2. Πόσα τέτοια τετράγωνα μπορούν να τοποθετηθούν κατά μήκος της κάθε διάστασης;

Πρόβλημα 2:



Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του διπλανού σχήματος ισούται με $(x-y) \cdot (x+y)$. Να ελέγξετε τον ισχυρισμό του και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μαθηματικό περιοδικό
για το Γυμνάσιο
Ευκλείδης **Α'** 113
ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019 ευρώ 3,00

Σχολιάζουμε επιλεγμένα θέματα από τον διαγωνισμό
«ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ»

Η απόδειξη του μικρού Gauss για το άθροισμα
 $1+2+3+\dots+100$ με σφαιρίδια



ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 10869/88 ΚΕΜΤ.ΑΘ.

Μεγάλες Επιτυχίες για την Ε.Μ.Ε.

Αργυρό, Χάλκινα μετάλλια & Εύφημες μνείες στην Ολυμπιάδα

Αργυρά, Χάλκινα μετάλλια στην Βαλκανιάδα

Αργυρά & Χάλκινα μετάλλια Junior Balkan

Χάλκινα μετάλλια & Εύφημες μνείες στην Ολυμπιάδα Κοριτσιών

Χάλκινα μετάλλια στον Διαγωνισμό Νέων ΜΥΜC



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία