

Συστήματα 1ου Βαθμού

Λαγός Γιώργος – Τζίφας Νίκος

Με την εργασία μας αυτή απευθυνόμαστε στους μαθητές της Γ' τάξης και θέλουμε να τους βοηθήσουμε, να διευρύνουν τις γνώσεις τους στην επίλυση συστημάτων 1ου βαθμού, αλλά και γενικότερα για τις εφαρμογές που έχουν.

Αυτές τις γνώσεις εκτιμούμε ότι θα τις αποκτήσετε με την μελέτη και λύση καταλλήλων συστημάτων, που επιλέγουμε για τον λόγο αυτό.

Έχουμε μάλιστα την γνώμη ότι η άμεση συμμετοχή σας στην δραστηριότητα αυτή, θα συμβάλλει στην απόκτηση αυτής της εμπειρίας. Για τον λόγο αυτό θα σας δίνεται η δυνατότητα συμμετοχής στην επεξεργασία κάθε άσκησης.

Για να μελετήσετε αυτά που σας προτείνουμε παρακάτω, πρέπει να γνωρίζετε όλα όσα διδαχτήκατε στο σχολείο σας στο κεφάλαιο αυτό.

Θα διαπιστώσετε ότι με τις γνώσεις πάνω στα συστήματα έχετε την δυνατότητα:

Να επιλύετε συστήματα χρησιμοποιώντας και “**άλλες τεχνικές επίλυσης**” πέρα από αυτές που διδαχθήκατε, οι οποίες θα σας επιτρέπουν να απλοποιείτε την επίλυσή τους, “**Εφόσον φυσικά στα συστήματα που επεξεργάζεσθε μπορούν να εφαρμοσθούν οι τεχνικές αυτές**”.

Να επιλύετε συστήματα με περισσότερες εξισώσεις και αγνώστους.

Να χρησιμοποιείτε τα συστήματα γενικά για την επεξεργασία και άλλων θεμάτων.

1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3\chi + 2\psi}{3} - \frac{2\psi - \chi}{2} = 2 \\ 2\frac{3\chi + 2\psi}{3} + \frac{2\psi - \chi}{2} = 14 \end{cases}$$

Λύση

Μπορείτε φυσικά να επεξεργασθείτε το σύστημα και να το φέρετε στην μορφή:

$$\begin{cases} \alpha_1\chi + \beta_1\psi = \gamma_1 \\ \alpha_2\chi + \beta_2\psi = \gamma_2 \end{cases} \text{ και στην συνέχεια να το λύσετε.}$$

Αν όμως παρατηρήσετε ότι σε κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματος αυτού υπάρχουν δύο κλασματικές παραστάσεις των αγνώστων χ και ψ , τότε κάνοντας χρήση βοηθητικού αγνώστου και θέτοντας:

$$\frac{3\chi + 2\psi}{3} = \kappa \quad \text{και} \quad \frac{2\psi - \chi}{2} = \lambda \quad \text{το σύστημα γράφεται :}$$

$$\begin{cases} \kappa - \lambda = 2 \\ 3\kappa + \lambda = 14 \end{cases}$$

Ήλθε τώρα η σειρά σας να επιλύσετε τα συστήματα αυτά. Πρέπει να βρείτε αρχικά τις τιμές των κ και λ και στην συνέχεια τις τιμές των χ και ψ .

2. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

Λύση

Με σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους πιθανόν να ασχολείστε για πρώτη φορά. Η επίλυσή του στηρίζεται σε κανόνες που ήδη γνωρίζετε και μπορείτε να το επιλύσετε

Γνωρίζετε ότι :

«Το σύστημα που προκύπτει μετά την απαλοιφή ενός αγνώστου μεταξύ των εξισώσεων ενός συστήματος έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό».

Για την επίλυση του ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^ο

Επιλέγουμε τυχαία δύο από τις εξισώσεις του συστήματος. Στην περίπτωση μας την 1η και την 2η και έχουμε: $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases}$ Απαλείφουμε τώρα ένα από τους αγνώστους, όποιον εμείς επιλέξουμε. Εδώ επιλέγουμε τον ψ , οπότε προκύπτει η εξίσωση: $\{5x + 7z = -9\}$

Βήμα 2^ο

Επιλέγουμε στην συνέχεια άλλες δύο από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος π.χ. την 2η και 3η εξίσωση. (μπορείτε φυσικά να επιλέξετε την 1η και 3η) Τότε έχετε:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

Στο σημείο αυτό απαλείφουμε **πάλι τον ίδιο άγνωστο ψ** και προκύπτει η εξίσωση: $\{x - 5z = 11\}$

Βήμα 3^ο

Οι δύο εξισώσεις: $\{5x + 7z = -9\}$ και $\{x - 5z = 11\}$ αποτελούν ένα σύστημα 1ου βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Το σύστημα αυτό είναι:

$$\begin{cases} 5x + 7z = -9 \\ x - 5z = 11 \end{cases}$$

Ήλθε τώρα η σειρά σας. Να επιλύσετε αρχικά το σύστημα αυτό και αφού βρείτε τις τιμές των αγνώστων x και z , στη συνέχεια με αντικατάσταση των τιμών τους σε μία από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος, να βρείτε και την τιμή του ψ .

Η λύση του συστήματος είναι: $(x = 1, y = 2, z = -2)$

3. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{4} \\ 3x - 4\psi + 5\omega = 28 \end{cases}$$

Λύση

Εάν χρησιμοποιήσετε τις δυνατότητες που σας δίνει η πρώτη εξίσωση του συστήματος με τους ίσους λόγους και θέσετε: $\frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{4} = \lambda$ τότε θα προκύψουν οι εξισώσεις:

$$\frac{x}{2} = \lambda \text{ ή } x = 2\lambda, \frac{\psi}{3} = \lambda \text{ ή } \psi = 3\lambda \text{ και τέλος } \frac{\omega}{4} = \lambda \text{ ή } \omega = 4\lambda.$$

Συνεχίστε τώρα για να υπολογίσετε το λ αντικαθιστώντας τους αγνώστους x, ψ, ω στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Εάν εργαστείτε σωστά θα βρείτε $x=4, \psi=6$ και $\omega=8$.

4. Να υπολογισθούν οι: x, ψ, ω εάν γνωρίζετε ότι:

$$(x+\psi-4)^2 + (\psi+\omega-5)^4 + (\omega+x-7)^6 = 0$$

Λύση

Για τον υπολογισμό των αγνώστων αυτών θα μελετήσουμε μαζί την παράσταση που μας δίνεται, προκειμένου να εξάγουμε τα συμπεράσματα που θα μας βοηθήσουν για να υπολογίσουμε τους αγνώστους.

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι: «η παράσταση αυτή είναι άθροισμα μη αρνητικών προσθετέων».

Πράγματι οι προσθετέοι: $(x+\psi-4)^2, (\psi+\omega-5)^4$ και $(\omega+x-7)^6$ του αθροίσματος που μας δίνεται

είναι μη αρνητικοί, επειδή οι εκθέτες των δυνάμεων τους είναι άρτιοι.

Πρέπει τώρα να απαντήσουμε στο ερώτημα: «Πότε ένα άθροισμα μη αρνητικών προσθετέων ισούται με μηδέν;»

Η απάντηση είναι μία: «Ένα άθροισμα μη αρνητικών προσθετέων ισούται με μηδέν εάν καθένας από τους προσθετέους αυτούς είναι μηδέν»

Επομένως πρέπει : $(\chi + \psi - 4)^2 = 0$, $(\psi + \omega - 5)^4 = 0$ και $(\omega + \chi - 7)^6 = 0$

Γνωρίζετε όμως ότι μία δύναμη είναι μηδέν, εάν η βάση της δύναμης είναι μηδέν.

Άρα πρέπει κάθε μία από τις ποσότητες: $\chi + \psi - 4$, $\psi + \omega - 5$ και $\omega + \chi - 7$ να ισούται με μηδέν.

Προκύπτει λοιπόν το σύστημα:

$$\begin{cases} \chi + \psi - 4 = 0 \\ \psi + \omega - 5 = 0 \\ \omega + \chi - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \chi + \psi = 4 \\ \psi + \omega = 5 \\ \omega + \chi = 7 \end{cases}$$

Προτείνουμε τώρα να συνεχίσετε και να επιλύσετε το σύστημα αυτό.

Μπορείτε φυσικά να το επιλύσετε, ακλουθώντας τις διαδικασίες που είδαμε παραπάνω, όταν ασχοληθήκαμε με το σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Σας προτείνουμε όμως να ακολουθήσετε μία άλλη πορεία:

Να προσθέσετε τις εξισώσεις του συστήματος κατά μέλη.

Τότε θα έχετε: $2(\chi + \psi + \omega) = 16$ ή $\chi + \psi + \omega = 8$.

Από εδώ και πέρα δεν θα δυσκολευτείτε για να υπολογίσετε τις τιμές των αγνώστων συνδυάζοντας την εξίσωση αυτή με κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματος των αγνώστων.

5. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{3}{\chi} - \frac{4}{\psi} = \frac{17}{6} \\ \frac{5}{\chi} + \frac{3}{\psi} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Λύση

Σας συμβουλεύουμε για την επίλυση του συστήματος αυτού να χρησιμοποιήσετε πάλι βοηθητικό άγνωστο και να θέσετε:

$$\frac{1}{\chi} = \kappa \quad \text{και} \quad \frac{1}{\psi} = \lambda$$

Μετά την εφαρμογή των μετασχηματισμών το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 3\kappa - 4\lambda = \frac{17}{6} \\ 5\kappa + 3\lambda = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Προτείνουμε να το επιλύσετε να βρείτε τις τιμές των κ και λ και στην συνέχεια των χ και ψ .

6. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} \chi + 2(\psi + \omega) = 15 \\ \psi + 2(\omega + \chi) = 14 \\ \omega + 2(\chi + \psi) = 11 \end{cases}$$

Λύση

Για την επίλυσή του σας προτείνουμε να χρησιμοποιήσετε βοηθητικό άγνωστο θέτοντας:

$$\chi + \psi + \omega = \kappa$$

Με την εισαγωγή του αγνώστου αυτού το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \chi + 2(\kappa - \chi) = 15 \\ \psi + 2(\kappa - \psi) = 14 \\ \omega + 2(\kappa - \omega) = 11 \end{cases}$$

Στη συνέχεια να προσθέσετε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος αυτού και θα καταλήξετε στην εξίσωση: $(\chi + \psi + \omega) + 6\kappa - 2(\chi + \psi + \omega) = 40$ ή $\kappa = 8$.

Συνεχίζοντας θα βρείτε $\chi = 1$, $\psi = 2$, $\omega = 5$.

Για να εξασκηθείτε και άλλο στο αντικείμενο αυτό θα σας προτείνουμε παρόμοιες ασκήσεις, δίνοντας για κάθε μία σχετική υπόδειξη και τις απαντήσεις

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λυθεί ο σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{2}{\chi + \psi + 1} + \frac{3}{3\chi - 2\psi - 2} = 2 \\ \frac{3}{\chi + \psi + 1} - \frac{1}{3\chi - 2\psi - 2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Χρησιμοποιείτε βοηθητικούς αγνώστους. Να θέσετε: $\frac{1}{\chi + \psi + 1} = \kappa$ και $\frac{1}{3\chi - 2\psi - 2} = \lambda$

Η λύση είναι: $\chi = 2$, $\psi = 1$

2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 8 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \quad \left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3} \right)$$

3. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{-3}{x-7} + \frac{5}{y+3} = 7 \\ \frac{3}{x-7} - \frac{1}{y+3} = -3 \end{cases} \quad \left(x = 8, y = \frac{-5}{2} \right)$$

4. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 6 \end{cases} \quad \left(x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{3} \right)$$

5. Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ 2\alpha x - \beta y = 5 \end{cases}$ έχει λύση $(x = 2, y = 3)$ να βρείτε τα α, β ($\alpha = 1, \beta = \frac{-1}{3}$)

6. Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 2\alpha + \gamma \\ \beta x + \alpha y = 4\beta + \gamma \end{cases}$ έχει λύση $(x = 1, y = -2)$

I. Να δείξετε ότι $\alpha = -\beta$

II. Να βρείτε μία σχέση που να συνδέει τα α και γ

7. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x - y - 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases} \quad (x = 2, y = -6, z = 3)$$

8. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2y - 5z = 1 \\ x = 6 - 4z \end{cases} \quad (x = 2, y = 3, z = 1)$$

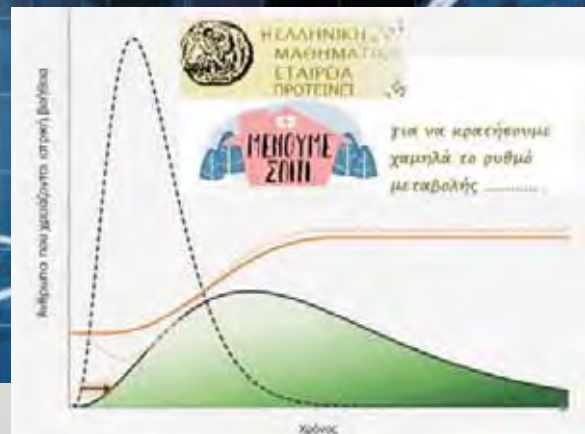
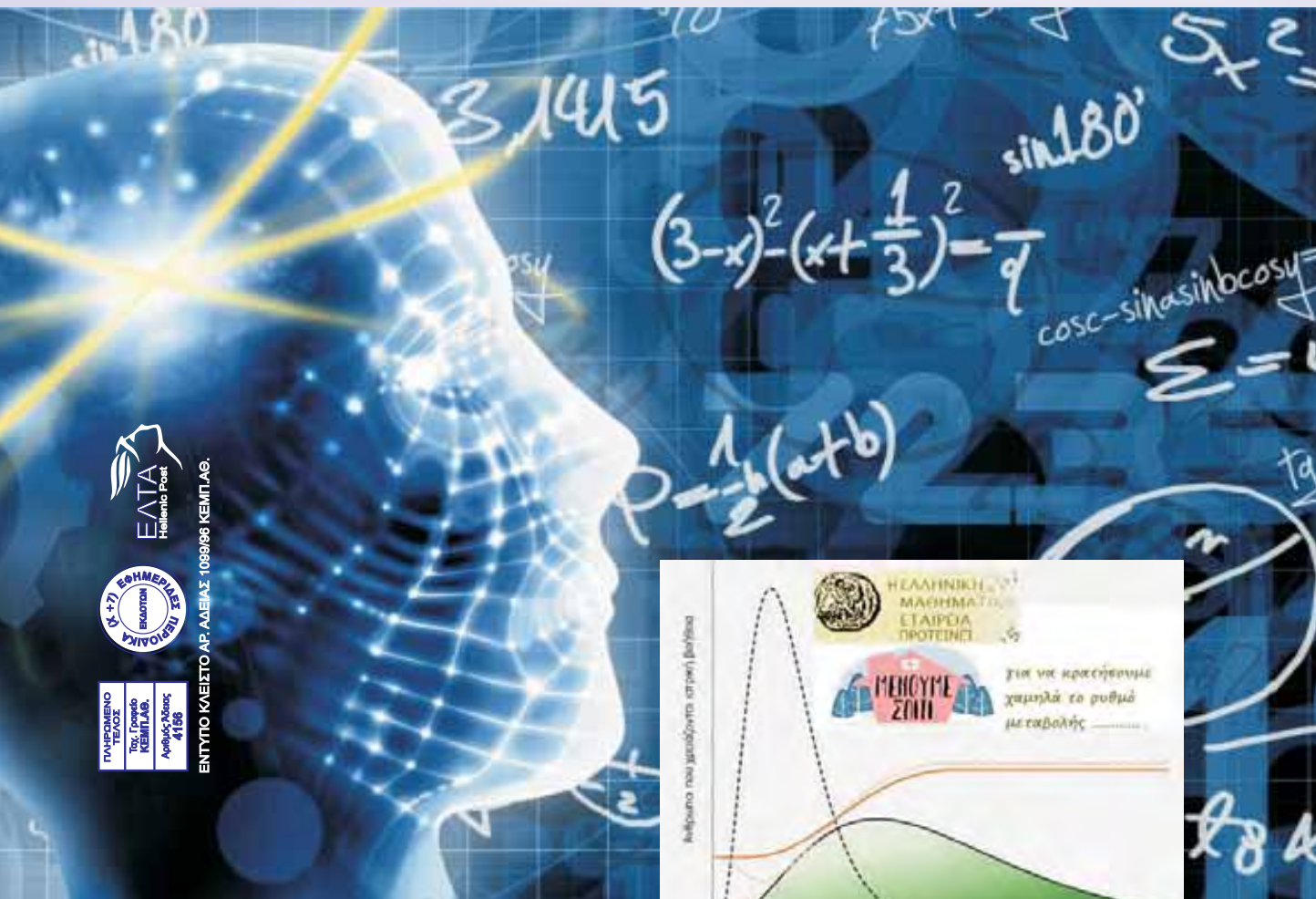
9. Το άθροισμα των πλευρών ενός τριγώνου ανά δύο είναι 19, 23, 20 μέτρα. Να βρείτε το μήκος κάθε πλευράς. Τα μήκη των πλευρών είναι: ($\alpha=8, \beta=11, \gamma=12$)

Μαθηματικό περιοδικό για το

Ευκλείδης Α' 115

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2020 ευρώ 3,00

Ο Θαλής και η Πυραμίδα του Χέοπα



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία