Θέματα Ισότητας - Ομοιότητας τριγώνων

Γεώργιος Μπατέλης

Άσκηση

Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε ΑΒ≠ΒΓ και κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε. Στη συνέχεια φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΔΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Ρ.

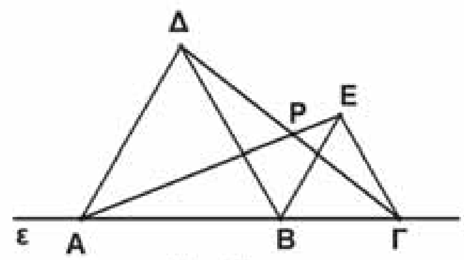
I. **Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΓΔ.**

II. $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{P} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$

III. **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΡΓ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας.**

Λύση

- Κάνουμε πάντα ένα σχήμα με γεωμετρικά όργανα, όσο γίνεται καλύτερα. (Το σχήμα 1)
- Θα πρέπει, από την εκφώνηση της άσκησης να κρατήσουμε να αναγκαία. Γράφουμε λοιπόν Υπόθεση (Δεδομένα)-Ζητούμενα (Συμπέρασμα).



(Σχ. 1)

Υ (υπόθεση)	Σ (συμπέρασμα)
$\overset{\triangleleft}{\mathrm{AB}\Delta}$ ισόπλευρο	**i)** $\mathrm{AE} = \Gamma\Delta$
$\overset{\triangleleft}{\mathrm{B}\Gamma\mathrm{E}}$ ισόπλευρο	**ii)** $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$
	iii) $\overset{\triangleleft}{\mathrm{ABE}} \approx \overset{\triangleleft}{\mathrm{AP}\Gamma}$

I. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ΑΕ=ΓΔ.

Η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων περνάει μέσα από την ισότητα δύο τρίγωνων.

Αναζητούμε λοιπόν δύο τρίγωνα, το ένα να περιέχει την ΑΕ και το άλλο την ΓΔ. Αυτά είναι τα ΑΕΒ και ΔΒΓ, τα οποία φαίνεται και από το σχήμα ότι μάλλον είναι ίσα. Μην ξεχνάτε ένα καλό σχήμα πάντα βοηθάει στην λύση μιας άσκησης.

Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι $\overset{\triangleleft}{AB E} = \overset{\triangleleft}{\Delta B\Gamma}$.

Πώς γίνεται αυτό;

Κριτήρια ισότητας τριγώνων. Ποια είναι αυτά;

Ας τα θυμηθούμε.

Τι παρατηρείτε; Τι θα πρέπει να αποδείξουμε ότι έχουν οπωσδήποτε;

Τουλάχιστον μια πλευρά ίση.

Ποια μπορεί να είναι αυτή, ειδικά όταν το σχήμα είναι λίγο μπερδεμένο;

Ας το ξεμπερδέψουμε!

Θα γράψουμε τα δύο τρίγωνα που θέλουμε να συγκρίνουμε και κάτω από κάθε τρίγωνο θα βάλουμε τα πρωτεύοντα στοιχεία τους, ώστε να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

$\overset{\triangle}{AB E}$	$\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$
AB	$B\Gamma$
AE	$\Gamma\Delta$
BE	ΔB
$A\hat{B}E$	$\Delta\hat{B}\Gamma$
$A\hat{E}B$	$\Delta\hat{\Gamma}B$
$E\hat{A}B$	$B\hat{\Delta}\Gamma$

Θα πρέπει να δούμε ποια πλευρά του $\overset{\triangle}{ABE}$ είναι ίση με ποια του πλευρά του $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$.

Ας ξεκινήσουμε από την ΑΒ.

Η ΑΒ δεν φαίνεται να είναι ίση με την ΒΓ, ούτε με την ΓΔ, μένει λοιπό μόνο η ΔΒ.

Φαίνεται ότι είναι ίσες, χρειάζεται όμως επιβεβαίωση (απόδειξη). Ποιος θα με βοηθήσει;

Ο «βοηθός» μου, Ποιος είναι αυτός;

Μα η υπόθεση, αυτός είναι ο «βοηθός» μου! Αυτός και μόνο αυτός, θα με βοηθήσει να δώσω απαντήσεις στα ερωτήματά μου.

Για να δούμε τι έχουμε στην υπόθεση.

Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ είναι ισόπλευρο.

Πως το χρησιμοποιούμε αυτό για τις πλευρές;

Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

Δηλαδή ΑΒ=ΑΔ=ΒΔ, άρα, αποδείξαμε ότι **ΑΒ=ΒΔ (1).**

Το πρώτο βήμα έγινε, δηλαδή αποδείξαμε ότι τα δύο τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABE}$ και $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$ έχουν μια πλευρά ίση και η απόδειξη έγινε με την βοήθεια της υπόθεσης (του βοηθού μου) και μάλιστα όχι όλης της υπόθεσης. Υπάρχει και άλλο τρίγωνο που είναι ισόπλευρο, το $\overset{\triangle}{B\Gamma E}$. Θα πρέπει και αυτό να το χρησιμοποιήσουμε.

Προσοχή: Για να λύσουμε μια άσκηση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όλες τις υποθέσεις μας, τουλάχιστον μια φορά την καθεμία.

Ας δούμε λοιπόν μήπως τα τρίγωνα που θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι ίσα, δηλαδή τα $\overset{\triangle}{ABE}$ και $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$ έχουν και άλλη πλευρά ίση.

Η πλευρά ΑΕ του $\overset{\triangle}{ABE}$ φαίνεται να ίση με την πλευρά ΓΔ του $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$, αυτό όμως πρέπει να αποδειχτεί.

Ας δούμε και τις δύο τελευταίες πλευρές, δηλαδή τις ΒΕ και ΒΓ.

Η ΒΕ και η ΓΒ είναι πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου $\overset{\triangle}{B\Gamma E}$, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή θα έχουμε **ΒΕ=ΒΓ (2).**

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την υπόθεσή μας βρήκαμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABE}$ και $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$ έχουν δύο πλευρές ίσες.

Τί πρέπει να αποδείξουμε ώστε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABE}$ και $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$ να είναι ίσα;

Ας θυμηθούμε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Έχουμε ήδη δύο πλευρές ίσες, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι έχουν τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Στο τρίγωνο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ η περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ και ΒΕ (επειδή οι δύο πλευρές έχουν κοινό σημείο το Β, να τις γράψουμε ΒΑ και ΒΕ) είναι η $\mathbf{A\hat{B}E}$.

Όμοια στο τρίγωνο $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ η περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΒΔ και ΒΓ είναι η $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$.

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{A\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma}$ **(3). (Αυτός είναι τώρα ο στόχος)**
Τις δύο υποθέσεις τις έχουμε χρησιμοποιήσει και αποδείξαμε την ισότητα δύο πλευρών σε κάθε τρίγωνο. Θέλουμε όμως και ισότητα γωνιών.
Θα προστρέξουμε πάλι στον βοηθό μας και θα ζητήσουμε βοήθεια για γωνίες.
Τι γνωρίζουμε για τα ισόπλευρα τρίγωνα και τις γωνίες τους;
Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60^{o}.
Αυτό μας βολεύει για να φτάσουμε στον στόχο μας;

Πόσες μοίρες φαίνεται να είναι κάθε μία από τις γωνίες $\mathbf{A\hat{B}E}$ και $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$;
Προφανώς περισσότερες από 60^{o}. Πόσες άραγε;

Ας δούμε την $\mathbf{A\hat{B}E}$ η οποία είναι $\mathbf{A\hat{B}E = A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}E = 60^{o} + \Delta\hat{B}E}$ **(4).**

Ας δούμε και την $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$ η οποία είναι $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E + 60^{o}}$ **(5).**
Από τις σχέσεις (4) και (5), έχουμε ότι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, άρα θα είναι και τα πρώτα, οπότε $\mathbf{A\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma}$, δηλαδή αποδείξαμε τη σχέση (3) που ήταν και ο στόχος μας.
Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται συνοπτικά τι έχουμε κάνει μέχρι τώρα.

$\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$	$\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$
AB	**ΒΓ**
AE	**ΓΔ**
BE	**ΔΒ**
$\mathbf{A\hat{B}E}$	$\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$
$\mathbf{A\hat{E}B}$	$\mathbf{\Delta\hat{\Gamma}B}$
$\mathbf{E\hat{A}B}$	$B\hat{\Delta}\Gamma$

Για να είναι πλήρης η απάντηση μας, θα πρέπει να εφαρμόσουμε το θεώρημα που αναφέρεται στην ισότητα των τριγώνων ώστε να βγάλουμε το συμπέρασμα που θέλουμε.

Τα τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ έχουν:

- **ΑΒ** = **ΔΒ** λόγω της σχέσης (1)
- **ΒΕ** = **ΒΓ** λόγω της σχέσης (2)
- $\mathbf{A\hat{B}E}$ = $\mathbf{\Delta\hat{B}\Gamma}$ λόγω της σχέσης (3)

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (κριτήριο δύο πλευρές και περιεχόμενη γωνία), οπότε θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}} = \overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$, οπότε θα έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα.
Ποια είναι αυτά;
Προφανώς οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες.
Συγκεκριμένα έχουμε ότι ΑΕ=ΓΔ, καθώς και ότι οι άλλες δύο γωνίες είναι ίσες.
Εδώ τελειώνει η απάντηση στο ερώτημα i).

II. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{A\hat{E}B = \Delta\hat{\Gamma}B}$.

Θα ξανακάνουμε τους ιδίους συλλογισμούς.
Η ισότητα των γωνιών περνάει μέσα από την ισότητα δύο τριγώνων.
Ποια τρίγωνα περιέχουν τις παραπάνω γωνίες;

Αυτά είναι τα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ τα οποία όμως αποδείξαμε στο ερώτημα i) ότι είναι ίσα, άρα θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
Ποιες όμως είναι αυτές που απομένουν;

Οι γωνίες του $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ είναι οι $\mathbf{A\hat{E}B}$ και $\mathbf{E\hat{A}B}$.

Οι γωνίες του $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ είναι οι $\mathbf{\Delta\hat{\Gamma}B}$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$.
Ποιες όμως είναι ίσες και γιατί;

Βέβαια εδώ μας ζητάει να αποδείξουμε ότι $\mathrm{A\hat{E}B} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$, αν όμως μας ζητούσε να βρούμε ποιες από τις άλλες γωνίες των τριγώνων $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$, $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$ είναι ίσες πως θα το βρίσκαμε;
Πραγματικά είναι ένα πολύ εύλογο ερώτημα.
Η απάντηση είναι σε αυτό που γράφει και το βιβλίο σας: "όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα έχουν όλα τους τα **αντίστοιχα** στοιχεία ίσα".
Τι σημαίνει αντίστοιχα στοιχεία ίσα;
Η απάντηση είναι: απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομοίως ίσες πλευρές.

Η γωνία $\mathbf{A\hat{E}B}$ του τριγώνου $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ η οποία είναι ίση με την πλευρά ΔΒ του τριγώνου $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$, που απέναντί της είναι η γωνία $\mathbf{\Delta\hat{\Gamma}B}$, άρα θα είναι $\mathbf{A\hat{E}B} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ (4).
Εδώ τελειώνει η απάντηση στο ερώτημα ιι).
ΙΙΙ. Η λογική είναι παρόμοια.
Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια; Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας δύο τριγώνων;

Τα τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{AP\Gamma}}$ έχουν μια **γωνία κοινή**, την $\mathbf{E\hat{A}B} = \mathbf{P\hat{A}\Gamma}$.
Μάλλον και όπως φαίνεται και από το σχήμα, αρκεί να έχουν άλλη μία γωνία ίση.
Γράφουμε τα δύο τρίγωνα με τις γωνίες τους.

$\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$	$\overset{\triangleleft}{\mathbf{AP\Gamma}}$
$\mathbf{\hat{A}BE}$	$\mathbf{\hat{A}P\Gamma}$
$\mathbf{A\hat{E}B}$	$\mathbf{P\hat{A}\Gamma}$
$\mathbf{E\hat{A}B}$	$\mathbf{P\hat{\Gamma}A}$

Πολλές φορές ένα δεύτερο ερώτημα σε μια άσκηση βοηθιέται από το πρώτο ερώτημα. Στο πρώτο ερώτημα αποδείξαμε την ισότητα δύο τριγώνων, των $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$.

Ας ρίξουμε μια ματιά μήπως κάποιο από τα ζευγάρια των γωνιών που θέλουμε να αποδείξουμε έχει ήδη αποδειχτεί.

Προφανώς η γωνία $\mathbf{\hat{A}P\Gamma}$ του $\overset{\triangleleft}{\mathbf{AP\Gamma}}$ δεν μπορεί να είναι, γιατί δεν είναι γωνία των $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ABE}}$, $\overset{\triangleleft}{\mathbf{\Delta B\Gamma}}$.

Άρα θα δούμε τη γωνία $\widehat{\mathbf{ΡΓΑ}}$.

Η γωνία $\widehat{\mathbf{ΡΓΑ}} = \widehat{\mathbf{ΔΓΒ}}$ του τριγώνου $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΔΒΓ}}$ και λόγω της σχέσης (4) είναι $\widehat{\mathbf{ΑΕΒ}} = \widehat{\mathbf{ΔΓΒ}}$, άρα $\widehat{\mathbf{ΡΓΑ}} = \widehat{\mathbf{ΑΕΒ}}$, οπότε τα τρίγωνα $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΑΒΕ}}$ και $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΑΡΓ}}$ είναι όμοια.

Θα βρούμε τώρα τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων.

Ξέρουμε ότι αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Πως θα βρούμε όμως τις ομόλογες πλευρές των τριγώνων;

Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

Ας δούμε πως θα τα καταφέρουμε.

Στον παρακάτω πίνακα σημειώνονται οι ίσες γωνίες των δύο τριγώνων:

$\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΑΒΕ}}$	$\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΑΡΓ}}$
$\widehat{\mathbf{ΑΒΕ}}$	$\widehat{\mathbf{ΑΡΓ}}$
$\widehat{\mathbf{ΑΕΒ}}$	$\widehat{\mathbf{ΡΑΓ}}$
$\widehat{\mathbf{ΕΑΒ}}$	$\widehat{\mathbf{ΡΓΑ}}$

Για να γράψουμε του λόγους των πλευρών κάνουμε τα παρακάτω:

- Γράφουμε τρείς γραμμές με δύο =, δηλαδή

$$\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$$

- Στους αριθμητές βάζουμε τις πλευρές του ενός τριγώνου, έστω του $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΑΒΕ}}$

$$\frac{\mathbf{ΑΒ}}{} = \frac{\mathbf{ΑΕ}}{} = \frac{\mathbf{ΒΕ}}{}$$

- Στους παρονομαστές βάζουμε τις ομόλογες πλευρές του άλλο τριγώνου. Πως τις βρίσκουμε;

  Στο τρίγωνο ΑΒΕ η πλευρά ΑΒ έχει απέναντί της τη γωνία $\widehat{\mathbf{ΑΕΒ}}$ η οποία είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\mathbf{ΡΓΑ}}$ του τριγώνου $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΑΡΓ}}$, η οποία έχει απέναντί της τη πλευρά την ΑΡ. Δηλαδή στον πρώτο λόγο ο παρονομαστής θα είναι ΑΡ.

  Όμοια στο τρίγωνο ΑΒΕ η πλευρά ΑΕ έχει απέναντί της τη γωνία $\widehat{\mathbf{ΑΒΕ}}$ η οποία είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\mathbf{ΑΡΓ}}$ του τριγώνου $\overset{\triangleleft}{\mathbf{ΑΡΓ}}$, η οποία έχει απέναντί της τη πλευρά την ΑΓ. Δηλαδή στον δεύτερο λόγο ο παρονομαστής θα είναι ΑΓ.

  Υποχρεωτικά η τρίτη πλευρά ΡΓ θα μπει στον τρίτο λόγο:

$$\frac{\mathbf{ΑΒ}}{\text{ΑΡ}} = \frac{\mathbf{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\mathbf{ΒΕ}}{\text{ΡΓ}}$$

  Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων τότε θα είναι :

$$\frac{\mathbf{ΑΒ}}{\mathbf{ΑΡ}} = \frac{\mathbf{ΑΕ}}{\mathbf{ΑΓ}} = \frac{\mathbf{ΒΕ}}{\mathbf{ΡΓ}} = \lambda$$

Εδώ τελειώνει η απάντηση στο ερώτημα iii).

Μαθηματικό περιοδικό για το

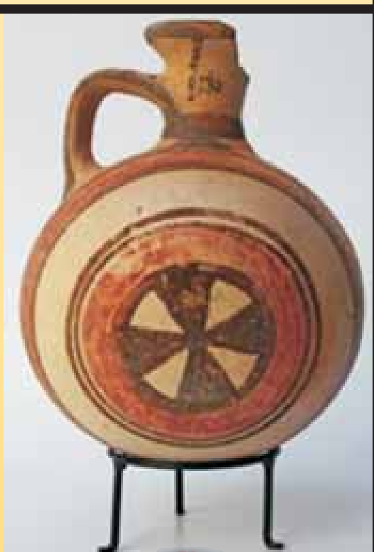
Ευκλείδης Α' Γυμνάσιο

119

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2021 ευρώ 3,00

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.
ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ +7) ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΕΚΔΟΤΩΝ

Τα Μαθηματικά της ... μπάλας!



Η ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων

Οι ρητοί αριθμοί και οι πράξεις με ρητούς

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία