# Η ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων

Αρδαβάνη Πόπη – Μάλλιαρης Χρήστος

Οι παρακάτω εικόνες δείχνουν την προσπάθεια ενός μαθητή να φτιάξει μία μικρότερη εικόνα του αγγείου που φαίνεται στην εικόνα 1.

Εικόνα 1: Βαρελόσχημη Λήκυθος

Εικόνα 2: 50% πλάτος

Εικόνα 3: 50% ύψος

Εικόνα 4: 50% πλάτος και 50% ύψος

Εικόνα 5: 30% πλάτος και 70% ύψος

Για κάθε μία από αυτές τις εικόνες δίνεται ο τρόπος κατασκευής. Για παράδειγμα η εικόνα 2 δημιουργήθηκε με πλάτος 50% του πλάτους της εικόνας 1 και ίδιο ύψος.

Η εικόνα 3 δημιουργήθηκε με ύψος το 50% του ύψους της εικόνας 1 και ίδιο πλάτος, η εικόνα 4 με πλάτος και ύψος το 50% αντίστοιχα του πλάτους και ύψους της εικόνας1.

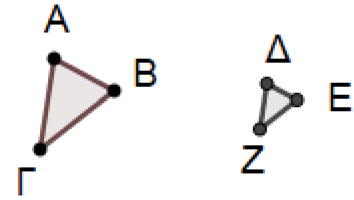
Η εικόνα 5 δημιουργήθηκε με πλάτος το 30% του πλάτους της εικόνας 1 και ύψος το 70% του ύψους της εικόνας1.

Ποια όμως από αυτές **μοιάζει** με το αγγείο της βαρελόσχημης λήκυθου στην εικόνα1;

Μήπως παρατηρήσατε ότι η εικόνα 4 μοιάζει καταπληκτικά με την εικόνα1; Ναι θα λέγαμε ότι το αγγείο στην εικόνα 4 αποτελεί μια **σμίκρυνση** του αγγείου στην εικόνα 1 ή ότι η εικόνα 1 αποτελεί μία **μεγέθυνση** του αγγείου στην εικόνα 4, ενώ όλες οι άλλες εικόνες αποτελούν μία **παραμόρφωση** της αρχικής εικόνας 1. Τι κανόνα μπορούμε να βγάλουμε στην περίπτωση που θέλουμε να φτιάξουμε μία εικόνα μικρότερη από μία άλλη ώστε να της μοιάζει και να μην την παραμορφώνει;

Τι θα γινόταν αν φτιάχναμε μία νέα εικόνα με πλάτος και ύψος το 30% της αρχικής αντίστοιχα; Σμίκρυνση ή παραμόρφωση;

Για να παρατηρήσουμε περισσότερες ιδιότητες που αφορούν την ομοιότητα σχημάτων και δη γεωμετρικών επιλέγουμε δύο αντίστοιχα τρίγωνα στις εικόνες 1 και 4, τα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε τη σχέση των αντιστοίχων πλευρών και γωνιών τους.




Με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων διαβήτη, χάρακα και μοιρογνωμονίου διαπιστώνουμε ότι για τις πλευρές ισχύει: ΑΒ=2ΔΕ, ΑΓ =2ΔΖ και ΒΓ=2ΖΕ ενώ για τις γωνίες: $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Delta}$, $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{E}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{Z}}$.

**Παρατηρούμε ότι: Τα δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις απέναντι πλευρές ανάλογες, με λόγο ομοιότητας 2:1.**

**ΓΕΝΙΚΑ: Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες πλευρές (πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες) ανάλογες.**

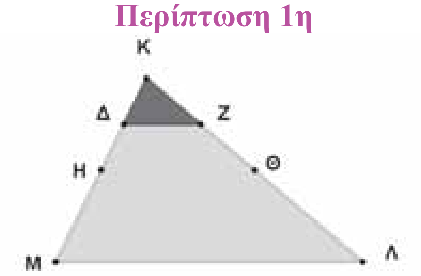
*Θυμόμαστε ότι:*

***Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία , τότε είναι όμοια.***

Θα σας προτείνουμε μερικούς τρόπους να φτιάξετε μια σμίκρυνση ή μεγέθυνση ενός σχήματος π.χ. τριγώνου στο χαρτί σας με γεωμετρικά όργανα.

Ας δοκιμάσουμε να φτιάξουμε ένα τρίγωνο σε σμίκρυνση του τριγώνου ΚΛΜ, με λόγο 1:4.

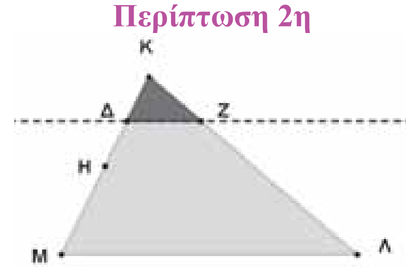
**Περίπτωση 1η**




Βρίσκουμε τα μέσα Η, Θ των πλευρών ΚΜ, ΚΛ αντίστοιχα και τα μέσα Δ, Ζ των ΚΗ, ΚΘ αντίστοιχα.

Το τρίγωνο ΚΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

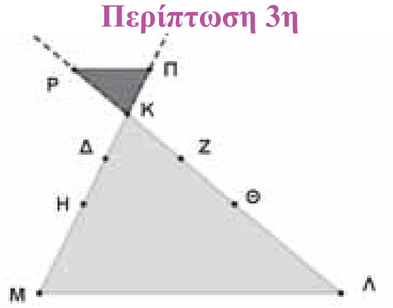
**Περίπτωση 2η**



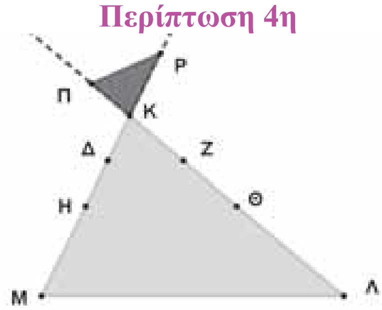

Βρίσκουμε το μέσο Η της πλευράς ΚΜ και το μέσο Δ του τμήματος ΚΗ. Από το Δ φέρνουμε ΔΖ παράλληλη στη βάση ΜΛ.

Το τρίγωνο ΚΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

**Περίπτωση 3η**



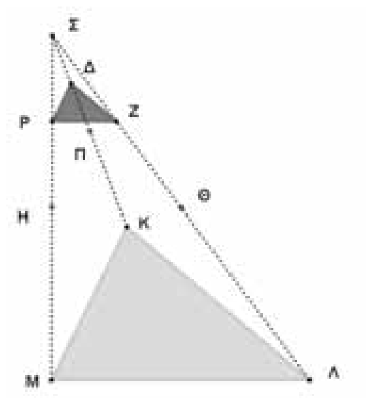

**Περίπτωση 4η**

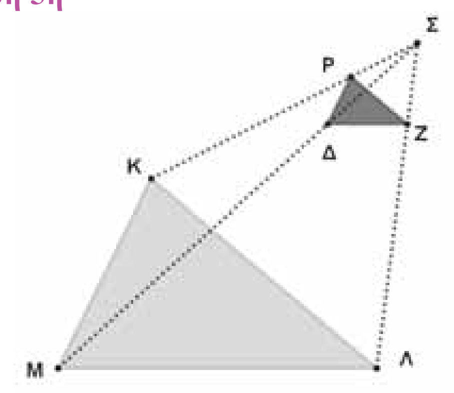


Ξεκινάμε με την δημιουργία των σημείων Δ και Ζ όπως στην 1η περίπτωση και μετά δημιουργούμε το ΚΠΡ τρίγωνο από τις προεκτάσεις των πλευρών ΜΚ και ΛΚ ώστε ΚΠ =ΚΔ και ΚΡ=ΚΖ.
Το τρίγωνο ΚΠΡ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

Επαναλαμβάνουμε την δημιουργία των σημείων Δ και Ζ όπως στην 1η περίπτωση και μετά δημιουργούμε το ΚΠΡ τρίγωνο από τις προεκτάσεις των πλευρών ΜΚ και ΛΚ ώστε ΚΡ=ΚΖ και ΚΠ =ΚΔ.
Το τρίγωνο ΚΠΡ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

### Περίπτωση 5η




**5α)** Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Σ έξω από το τρίγωνο ΚΛΜ και βρίσκουμε τα μέσα Η, Π, Θ των ΣΜ, ΣΚ και ΣΛ αντίστοιχα και τα μέσα Ρ, Δ και Ζ των ΣΗ, ΣΠ και ΣΘ αντίστοιχα.
Το τρίγωνο ΡΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΜΚΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

**5β)** Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Σ έξω από το τρίγωνο ΚΛΜ και βρίσκουμε τα σημεία Ρ, Δ, Ζ ώστε τα τμήματα ΣΚ=4ΣΡ, ΣΜ=4ΣΔ και ΣΛ=4ΣΖ.
Το τρίγωνο ΡΔΖ αποτελεί μία σμίκρυνση του τριγώνου ΚΜΛ με λόγο 1:4 (Γιατί;)

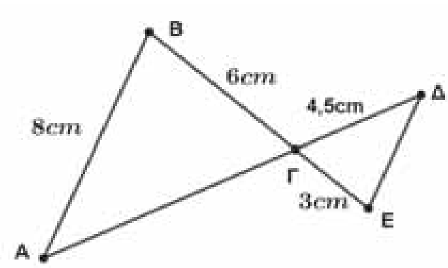
Άραγε το μέγεθος του τριγώνου ΔΡΖ που προκύπτει από τις διάφορες θέσεις του σημείου Σ αλλάζει; Μπορείτε να επινοήσετε εσείς και άλλους τρόπους κατασκευής;

Στους χάρτες βλέπουμε σημειωμένη μία κλίμακα π.χ. 1: 1000. Τι σημαίνει αυτό; Κάθε 1 εκατοστό που βλέπουμε στον χάρτη μας αντιστοιχεί σε 1000 εκατοστά του πραγματικού μέρους. Εχουμε μεγένθυνση ή σμίκρυνση; Κατά πόσο;

Άραγε τι συμβαίνει με τα εμβαδά δύο ομοίων σχημάτων; Όταν έχουμε δύο τρίγωνα όμοια με λόγο ομοιότητας 1:4 ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών τους;

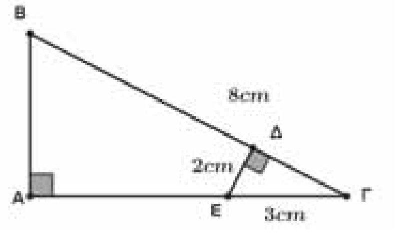
## Παραδείγματα:

**Παράδειγμα 1ο:** Στο διπλανό σχήμα ΑΒ//ΔΕ και Γ είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΑΔ. Αν ΑΒ=8cm, ΒΓ=6cm, ΓΔ=4,5cm και ΓΕ=3cm να υπολογίσετε το μήκος της ΔΕ και της ΑΓ.




Γνωρίζουμε ότι ΑΒ//ΔΕ άρα $\widehat{ΑΒΓ}=\widehat{ΔΕΓ}$ (εντός εναλλάξ γωνίες) και $\widehat{ΒΓΑ}=\widehat{ΕΓΔ}$ (ως κατακορυφήν) άρα τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια, θα υπολογίσουμε το λόγο των ομόλογων πλευρών και είναι $\lambda=\frac{ΒΓ}{ΕΓ}=\frac{6}{3}=2$. Πάμε τώρα να υπολογίσουμε και τις άλλες πλευρές με τη βοήθεια του λόγου λ, θα έχουμε: $\lambda = \frac{ΑΓ}{ΔΓ} = \frac{ΑΓ}{4,5} = 2$ άρα ΑΓ=9cm και $\lambda = \frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{8}{ΔΕ} = 2$ καταλήγουμε ότι ΔΕ=4cm.

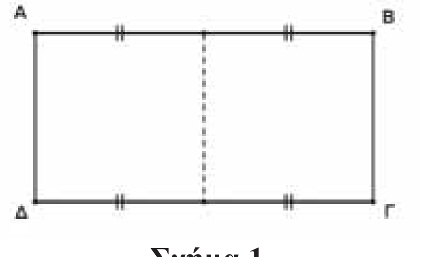
**Παράδειγμα 2ο:** Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^0$), από το σημείο Ε της ΑΓ με ΕΓ=3cm, κατασκευάζουμε ΕΔ□ΒΓ. Αν ΕΔ=2cm και ΒΓ=8cm να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.



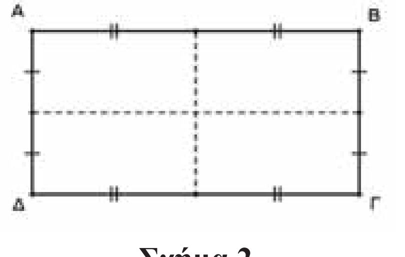

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια αφού έχουν: $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^0$ και $\hat{Γ}$ κοινή γωνία, θα υπολογίσουμε το λόγο των ομόλογων πλευρών και έχουμε $\lambda = \frac{ΒΓ}{ΕΓ} = \frac{8}{3}$ και $\lambda = \frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΒ}{2}$ άρα $\frac{8}{3} = \frac{ΑΒ}{2}$ δηλαδή $ΑΒ = \frac{16}{3}$cm.

## *Ασκήσεις προς διερεύνηση:*

**Άσκηση 1η:** Έχουμε ένα χαρτί Α4 και το διπλώνουμε μία φορά στη μέση (σχήμα 2). Τα ορθογώνια που σχηματίζονται είναι όμοια με το αρχικό; Έχουμε ένα χαρτί Α4 και το διπλώνουμε στη μέση, μία φορά στον οριζόντιο άξονα και μία ακόμη φορά στον κατακόρυφο άξονα (σχήμα2). Τα ορθογώνια που σχηματίζονται είναι όμοια με το αρχικό (Γιατί;)




**Σχήμα 1**

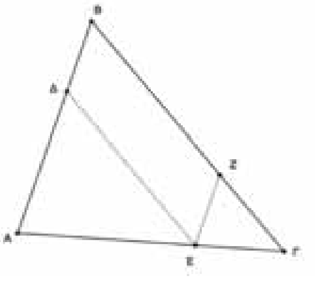



**Σχήμα 2**

**Άσκηση 2η:** Ένας μάστορας χρωμάτισε ένα τοίχο καταστήματος με διαστάσεις 5,4m x 3,2m και ζήτησε για την εργασία 2 ημερών σε αυτό, αμοιβή 80 ευρώ. Ένας γείτονας ζήτησε από τον μάστορα να αναλάβει τον τοίχο του καταστήματος του, με διπλάσιες διαστάσεις. Ο μάστορας δέχτηκε και συμφωνήσανε ότι θα τελειώσει αυτό το νέο έργο κάνοντας 4 μεροκάματα και ζήτησε διπλάσια αμοιβή. Έπραξε σωστά στους υπολογισμούς του; Μήπως υπήρξε λάθος; Μπορείτε να το βρείτε; Ποιος ζημιώθηκε από τους λάθους υπολογισμούς;

**Άσκηση 3η:** Σχεδιάστε ένα γεωμετρικό σχήμα σε μιλιμετρέ (ας έχει τις κορυφές του σε κορυφές τετραγώνων του μιλιμετρέ) και ζητήστε από ένα συμμαθητή σας να σας το σχεδιάσει με κλίμακα 1:3 και 3:1.

**Άσκηση 4η:** Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: ΕΖ//ΑΒ και ΕΔ//ΒΓ. Αν ΑΒ=15cm, ΑΔ=10cm και ΒΓ=20cm, να υπολογίσετε το μήκος του ΒΖ.



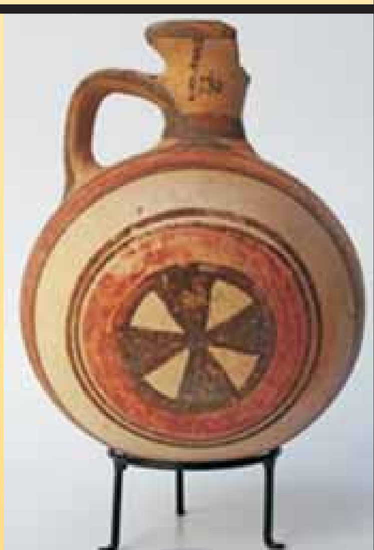
Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

# Ευκλείδης Α΄ 119

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2021 ευρώ 3,00

Τα Μαθηματικά της ... μπάλας!

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ +7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.



Η ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων

Οι ρητοί αριθμοί και οι πράξεις με ρητούς

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία