

Ιερά τρίγωνα στην Αρχαία Ελλάδα και η μελέτη των τριγώνων στις μέρες μας.

Μαρία Σίσκου



Τα τρίγωνα είχαν από τους αρχαίους χρόνους μεγάλη σημασία. Γνωρίζουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες έχτιζαν τους χώρους λατρείας τους σε σημεία τέτοια ώστε να δημιουργούνται ισοσκελή ή ισόπλευρα τρίγωνα. Ένα πολύ γνωστό τέτοιο ισοσκελές τρίγωνο σχηματίζουν ο Ναός του Ποσειδώνα στο Σούνιο με το Ναό της Αφαιάς Αθηνάς στην Αίγινα και το Ναό του Ηφαίστου στο θησείο στην Αθήνα. Επίσης ένα δεύτερο ισοσκελές τέτοιο τρίγωνο σχηματίζουν και ο Ναός του Απόλλωνα στους Δελφούς με τον Παρθενώνα και τον Ναό της Αφαιάς στην Αίγινα.

Ο γεωδαιτικός τριγωνισμός ήταν μια γενικότερη πρακτική στην Αρχαία Ελλάδα. Αυτό φαίνεται από τον Αριστοτέλη που κάνει αναφορές στον τρόπο επιλογής των ιερών, στα 'Πολιτικά', από τον Ίππαρχο, τον Στράβωνα και άλλους σπουδαίους αρχαίους Έλληνες. Σε νεότερες εποχές πολλοί επιστήμονες από όλο τον κόσμο ασχολήθηκαν, μελέτησαν και επιβεβαίωσαν αυτόν τον τριγωνισμό την Αρχαία Ελλάδα. Μέχρι και σήμερα είναι σχεδόν ασύλληπτο από τον ανθρώπινο νου πως καταφέρνανε να υπολογίσουν τρίγωνα και να εφαρμόσουν άλλες μαθηματικές σχέσεις σε τόσο μεγάλες αποστάσεις ειδικά όταν υπήρχε και τμήμα θάλασσας.

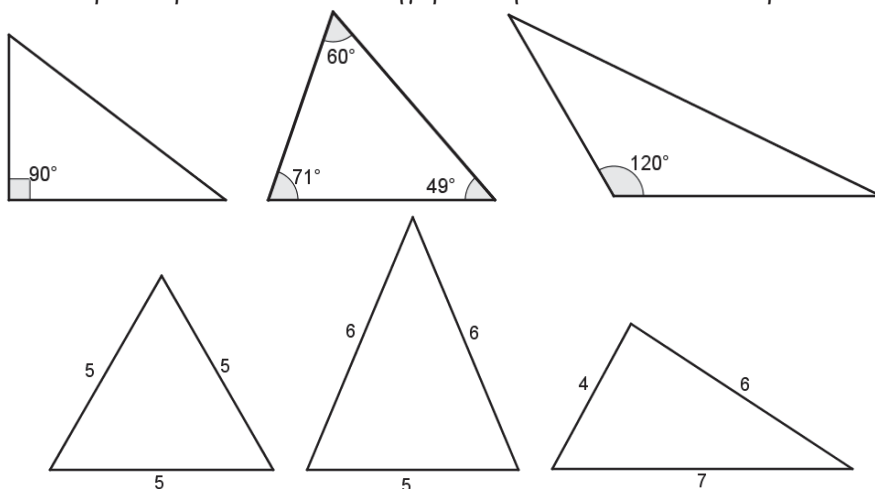
Ας μεταφερθούμε όμως τώρα στην δική μας εποχή να μελετήσουμε μαζί τα τρίγωνα και τα στοιχεία τους αλλά και τότε δυο τρίγωνα θα λέμε ότι είναι ίσα.

Είδη τριγώνων

Αρχικά να πούμε ότι χωρίζουμε τα τρίγωνα σε κατηγορίες ανάλογα με τις πλευρές ή τις γωνίες. Έτσι έχουμε :



- Μπορείτε να προσδιορίσετε σε ποια κατηγορία ανήκει καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα;



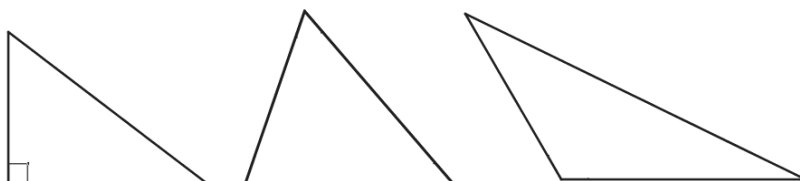
- Μπορείτε να σχεδιάσετε τρίγωνο με δύο ορθές ή δύο αμβλείες γωνίες;

Τα βασικά στοιχεία των τριγώνων

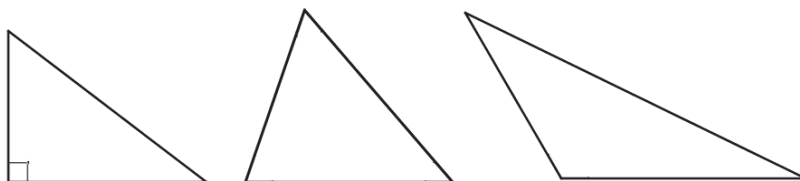
Οι πλευρές και οι γωνίες είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου, ενώ υπάρχουν και δευτερεύοντα. Τα δευτερεύοντα στοιχεία είναι:

- ο **Διάμεσος**: Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από μια κορυφή του τριγώνου και καταλήγει στο μέσο της απέναντι πλευράς.
- ο **Διχοτόμος**: Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από μια κορυφή του τριγώνου, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.
- ο **Ύψος**: Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από μια κορυφή του τριγώνου και καταλήγει κάθετα στην απέναντι πλευρά.

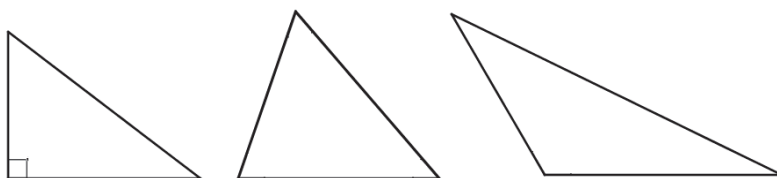
- Μπορείτε να σχεδιάσετε στα παρακάτω τρίγωνα τις 3 διαμέσους; Τι παρατηρείτε;



- Μπορείτε να σχεδιάσετε στα παρακάτω τρίγωνα τα 3 ύψη; Τι παρατηρείτε;



- Μπορείτε να σχεδιάσετε στα παρακάτω τρίγωνα τις 3 διχοτόμους; Τι παρατηρείτε;



Η ισότητα των τριγώνων

Πότε θα λέγαμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα; Η λογική μας λέει πως θα είναι ίσα αν έχουν ίσες όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες αντίστοιχα. Για να ελέγξουμε όμως αν δυο τρίγωνα είναι ίσα δεν χρειάζεται να ξέρουμε όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες. Αρκούνε λιγότερα στοιχεία ώστε να καταλήξουμε στο ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα.

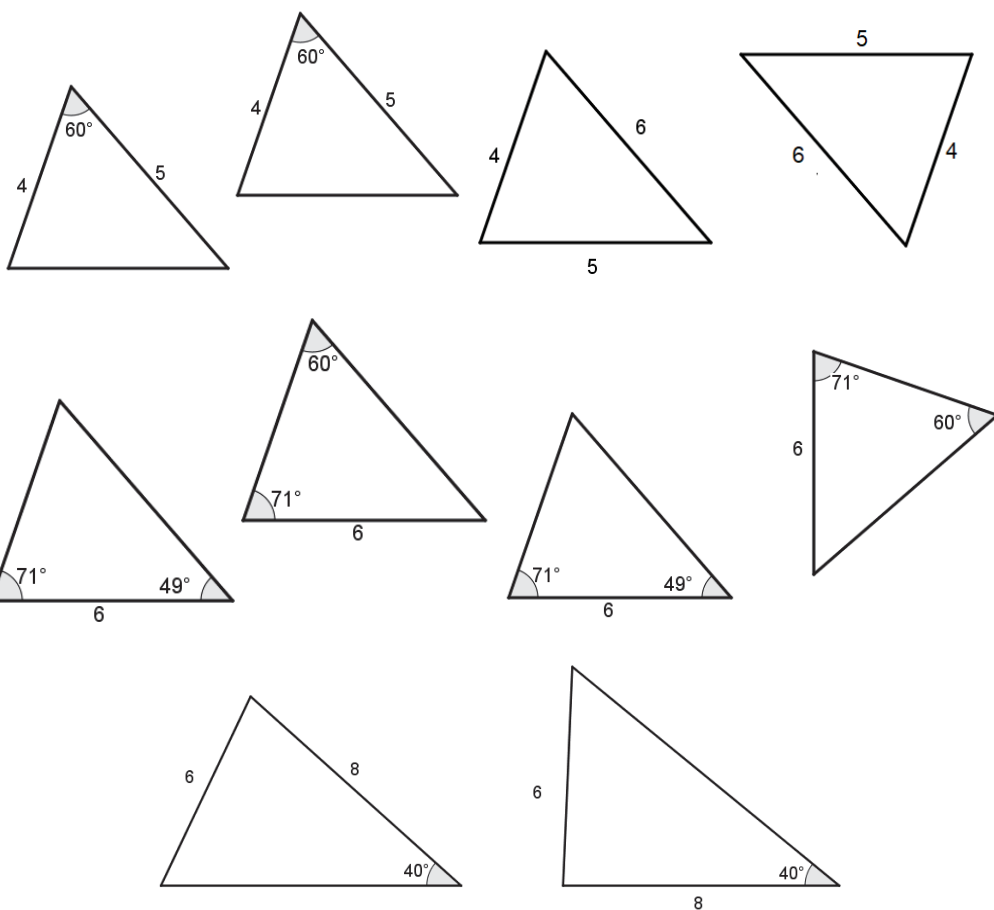
Για το σκοπό αυτό έχουμε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

1^ο κριτήριο: Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν 2 πλευρές ίσες μια προς μία και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία ίση. (Π- Γ- Π)

2^ο κριτήριο: Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν 1 πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία. (Γ- Π- Γ)

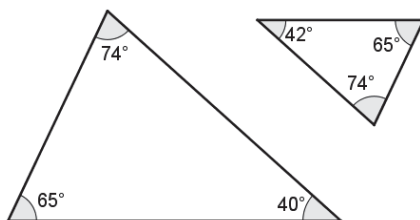
3^ο κριτήριο: Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν 3 πλευρές ίσες μια προς μία. (Π-Π- Π)

- Ποια λοιπόν από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα;



- Από τα παραπάνω τρίγωνα εύκολα συμπεραίνουμε ότι αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες και μια γωνία που δεν είναι η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία ίση τότε δεν είναι απαραίτητο ότι τα τρίγωνα θα είναι ίσα.
- Αν δυο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες ίσες είναι πάλι ίσα τα τρίγωνα;

Ας δούμε δυο τρίγωνα με ίσες όλες τις γωνίες. Είναι αυτά τα δυο τρίγωνα ίσα λοιπόν;



Παρατήρηση: Στην περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε αν δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα τότε έχουμε ήδη ίση την ορθή γωνία. Έτσι δύο μόνο στοιχεία ακόμα είναι αρκετά ώστε να πούμε ότι τα δυο τρίγωνα είναι ίσα. Γι' αυτό το λόγο έχουμε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:

1^ο κριτήριο: Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες.

2^ο κριτήριο: Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν μια πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μια προς μία.

Εφόσον κατανοήσαμε πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα ας συγκρίνουμε μαζί δυο τρίγωνα εφαρμόζοντας τις γνώσεις μας και κυρίως τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Εφαρμογή:

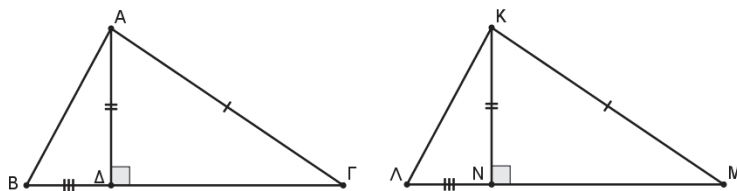
Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν ίσες τις πλευρές ΑΓ και ΚΜ, ίσα ύψη ΑΔ, ΚΝ και ΒΔ=ΛΝ. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα :

- i. ΑΔΓ, ΚΜΝ
- ii. ΑΒΓ, ΚΛΜ

Υπόθεση: ΑΒΓ, ΚΛΜ, ΑΔ=ΚΝ ύψη, ΑΓ=ΚΜ, ΒΔ=ΛΝ

Συμπέρασμα: i. ΑΔΓ=ΚΜΝ, ii. ΑΒΓ=ΚΛΜ

Λύση:



- Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΚΜΝ. Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και έχουν:
 - i. ΑΓ= ΚΜ (Υπόθεση)
 - ii. ΑΔ= ΚΝ (Υπόθεση)

Δηλαδή τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. ($\widehat{\Gamma} = \widehat{M}$)

- Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΚΛΜ και έχουν:
 - i. ΑΓ= ΚΜ (Υπόθεση)
 - ii. $\widehat{\Gamma} = \widehat{M}$ (από 1^ο ερώτημα)
 - iii. ΒΓ = ΜΛ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων)

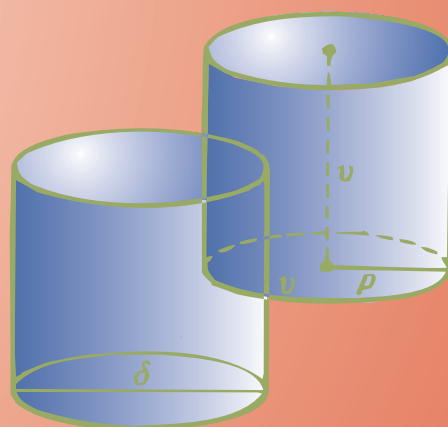
Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία ίση. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

Ευκλείδης Α' 117

Μαθηματικό περιοδικό για το
Γυμνάσιο

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019 ευρώ 3,00

Ασκήσεις Γεωμετρίας με ... Αφαίρεση



Blaise Pascal (1623-1662)



ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/08 ΚΕΜΤ.Ε.Ε.



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

