

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

Ερώτηση 1

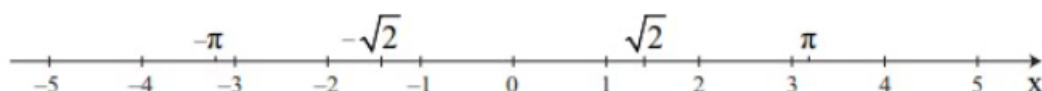
Ποιοι αριθμοί ονομάζονται ρητοί και ποιοι άρρητοι;

- **Ρητοί** αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν (ή μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.
Ιδιότητα: Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.
- Οι αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί) λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Ερώτηση 2

Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πραγματικοί; Πως παριστάνονται;

Οι **πραγματικοί** αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του **άξονα των πραγματικών αριθμών**, δηλαδή μιας ευθείας όπου σε κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός.



Ερώτηση 3

Ποιες ιδιότητες ισχύουν στην πρόσθεση πραγματικών αριθμών;

Για την πρόσθεση πραγματικών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα:

Ιδιότητα	Πρόσθεση
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο*	$\alpha + 0 = \alpha$
Αντίθετος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$

*Ο αριθμός 0 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

Ερώτηση 4

Ποιες ιδιότητες ισχύουν στον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών;

Για τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα:

Ιδιότητα	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο*	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ για $\alpha \neq 0$

* Ο αριθμός 1 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

Επίσης, για τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ισχύει η **επιμεριστική** ιδιότητα:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Ερώτηση 5

Πως ορίζονται οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης;

- Η αφαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Δηλαδή για να βρούμε τη διαφορά $\alpha - \beta$, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρέτέου.

- Η διαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \text{ με } \beta \neq 0$$

Δηλαδή για να βρούμε το πηλίκο $\alpha : \beta$, με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Ερώτηση 6

Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα;

Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$1. \left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$$

$$3. \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

$$4. \alpha = \beta \stackrel{\gamma \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

$$5. \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

$$6. \alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Ερώτηση 7

Πως ορίζεται η δύναμη πραγματικού αριθμού με εκθέτη ακέραιο;

Αν α πραγματικός αριθμός και ο n φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ παράγοντες}} \text{ για } n > 1$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $\alpha^1 = \alpha$

Στην περίπτωση που $\alpha \neq 0$ έχουμε:

$$\alpha^0 = 1 \text{ και } \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

Ερώτηση 8

Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο;

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται, είναι οι εξής:

- $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
- $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$
- $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$
- $(a^k)^l = a^{k \cdot l}$

Ερώτηση 9

Ποιες είναι οι πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες;

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.

Οι πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ερώτηση 10

Ποιες είναι οι βασικότερες μέθοδοι απόδειξης;

Οι μέθοδοι απόδειξης είναι η εξής:

- **Ευθεία απόδειξη:** Ξεκινάμε με την υπόθεση (η οποία είναι αληθής) και με διαδοχικά βήματα (πράξεις ή σειρά λογικών (αληθών) προτάσεων) καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Αν $a + b + c = 0$, τότε $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Παραλλαγές της ευθείας απόδειξης:

- Αρχίζουμε από το ένα μέλος (αυτό που έχει τις περισσότερες παραστάσεις), κάνουμε τις πράξεις και καταλήγουμε στο άλλο μέλος.

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- Κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη συγχρόνως και με τη χρήση ισοδυναμιών καταλήγουμε σε μια ισότητα που προφανώς αληθεύει.

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

- Λύνουμε την υπόθεση ως προς μια μεταβλητή και την αντικαθιστούμε στο ένα ή και στα δύο μέλη της ταυτότητας που θέλουμε να αποδείξουμε.

Παράδειγμα: Αν ισχύει $\alpha - \beta = 3$, να αποδείξετε ότι $3\alpha - \beta^2 - 3\beta + 2\alpha\beta = \alpha^2$

- **Απαγωγή σε άτοπο:** Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο**.

Παράδειγμα: Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός.

- **Με αντιπαράδειγμα:** Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα: Να εξετάσετε αν για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^2 > \alpha$.

Ερώτηση 11

Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$
2. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$
4. Αν ισχύει $\alpha - \beta = 3$, να αποδείξετε ότι $3\alpha - \beta^2 - 3\beta + 2\alpha\beta = \alpha^2$
5. Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός.
6. Να εξετάσετε αν για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^2 > \alpha$.

1. Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 0$, είναι $\alpha = -(\beta + \gamma)$ (σχέση 1), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha &= -(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \\ \alpha^3 &= [-(\beta + \gamma)]^3 \Leftrightarrow \\ \alpha^3 &= -(\beta + \gamma)^3 \Leftrightarrow \\ \alpha^3 &= -(\beta^3 + 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3) \Leftrightarrow \\ \alpha^3 &= -\beta^3 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - \gamma^3 \Leftrightarrow \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= -3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 \Leftrightarrow \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= -3\beta\gamma(\beta + \gamma) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= -3\beta\gamma(-\alpha) \Leftrightarrow \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= 3\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) &= (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 \Leftrightarrow \\
 \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 &= \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 + \alpha^2 y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2 x^2 \Leftrightarrow \\
 \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 &= \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2, \text{ που ισχύει.}
 \end{aligned}$$

4. Επειδή $\alpha - \beta = 3$, , είναι $\alpha = \beta + 3$, (σχέση 1), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 3\alpha - \beta^2 - 3\beta + 2\alpha\beta &\stackrel{(1)}{=} 3(\beta + 3) - \beta^2 - 3\beta + 2(\beta + 3)\beta \\
 &= 3\beta + 9 - \beta^2 - 3\beta + 2\beta^2 + 6\beta \\
 &= +9 - \beta^2 + 2\beta^2 + 6\beta \\
 &= \beta^2 + 6\beta + 9 \\
 &= (\beta + 3)^2 \\
 &= \alpha^2
 \end{aligned}$$

5. Εστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= (2\kappa + 1)^2 \\
 &= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 \\
 &= 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 \\
 &= 2\lambda + 1 \text{ (όπου } \lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa \text{).}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή $\alpha^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, που σημαίνει ότι ο α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι άρτιος. (άτοπο)

Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Αρα ο α είναι άρτιος.

6. Για $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ έχουμε ότι $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2 < \alpha$ άρα ο ισχυρισμός δεν ισχύει.

Βιβλιογραφία:

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Α' τάξης Γενικού Λυκείου, Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος, Υ.ΠΑΙ.Θ.

Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές