

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ερώτηση 1

Πως ορίζονται οι έννοιες "μεγαλύτερος από" ή "μικρότερος από"; (έννοια της διάταξης)

Ενας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν ισχύει $\alpha - \beta > 0$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε επίσης ότι ο β είναι μικρότερος του α και γράφουμε $\beta < \alpha$.

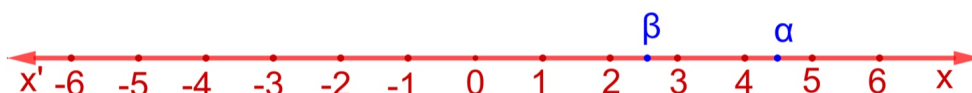
Δηλαδή ισχύει:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Γεωμετρικά, η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι **δεξιότερα** από τον β .



Ερώτηση 2

Τι σημαίνει ότι «ο α είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον β »;

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει

$$\alpha > \beta \text{ ή } \alpha = \beta,$$

τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$ και διαβάζουμε: « α μεγαλύτερος ή ίσος του β ».

Ερώτηση 3

Τι προκύπτει από τον ορισμό της διάταξης και τον τρόπο με τον οποίο εκτελούνται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού;

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

$$1. \left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

$$3. \text{ Αν } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta > 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} > 0 \end{cases}$$

$$4. \text{ Αν } \alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta < 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} < 0 \end{cases}$$

$$5. \alpha^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν } \alpha = 0.)$$

$$6. \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$7. \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

Ερώτηση 4

Να αναφέρεται τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

$$1. \text{ Αν } \alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma \quad (\text{Μεταβατική ιδιότητα})$$

$$2. \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

$$3. \alpha > \beta \stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

$$4. \alpha > \beta \stackrel{\gamma < 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

$$5. \left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

Προσοχή: Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

$$6. \text{ Για θετικούς αριθμούς } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ισχύει η συνεπαγωγή:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

Προσοχή: Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη.

$$7. \text{ Για θετικούς αριθμούς } \alpha, \beta \text{ και θετικό ακέραιο } n \text{ ισχύει η ισοδυναμία: } \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n.$$

Παρατήρηση: Οι ιδιότητες 5 και 6 ισχύουν και για περισσότερες ανισότητες.

Ερώτηση 5

Να αποδείξετε ότι για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n.$$

Ευθύ

Εστω $\alpha > \beta$ με $\alpha, \beta > 0$ Τότε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \alpha > \beta \\ \dots \\ \alpha > \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha > \beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta \Rightarrow \alpha^n > \beta^n$$

Αντίστροφο

Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Εστω λοιπόν ότι $\alpha^n > \beta^n$ και $\alpha \leq \beta$. Τότε:

1η περίπτωση: αν ήταν $\alpha = \beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^n = \beta^n$ (άτοπο),

2η περίπτωση: αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^n < \beta^n$ (άτοπο)

Αρα, $\alpha > \beta$.

Ερώτηση 6

Να αποδείξετε ότι για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n.$$

Ευθύ

Εστω $\alpha = \beta$. με $\alpha, \beta > 0$ Τότε από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει $\alpha^n = \beta^n$.

Αντίστροφο

Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Εστω λοιπόν ότι $\alpha^n = \beta^n$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:

1η περίπτωση: αν ήταν $\alpha > \beta$, από την παραπάνω ιδιότητα θα είχαμε $\alpha^n > \beta^n$ (άτοπο),

2η περίπτωση: αν ήταν $\alpha < \beta$, από την παραπάνω ιδιότητα θα είχαμε $\alpha^n < \beta^n$ (άτοπο).

Αρα, $\alpha = \beta$.

Ερώτηση 7

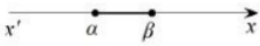
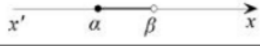
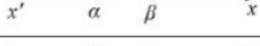
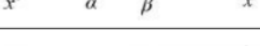
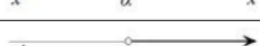
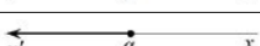
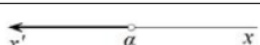
Πως ορίζεται το κλειστό διάστημα από α μέχρι β ; Πως ορίζεται το ανοικτό διάστημα από α μέχρι β ;

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$ λέγεται κλειστό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha < x \leq \beta$ λέγεται ανοικτό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται με (α, β) .

Ερώτηση 8

Πως ορίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους;

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

Βιβλιογραφία:

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Α' τάξης Γενικού Λυκείου, Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος, Υ.ΠΑΙ.Θ.

Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές