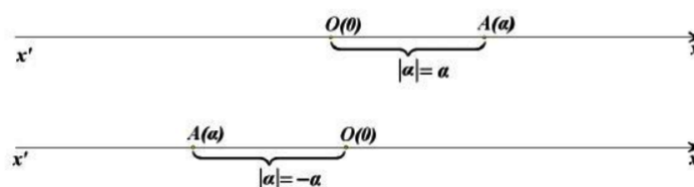


2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ερώτηση 1

Πως ορίζεται η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού; Να γράψετε τον αλγεβρικό ορισμό του.

Θεωρούμε έναν αριθμό a που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα. Τότε, η απόσταση του σημείου A από την αρχή O , δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA , ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού a και την συμβολίζεται με $|a|$



$|$. Ο αλγεβρικός ορισμός τους είναι:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Ερώτηση 2

Τι παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε στον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού;

- Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός. Δηλαδή,

$$|a| = a, \text{ για κάθε } a > 0$$

- Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του. Δηλαδή,

$$|a| = -a, \text{ για κάθε } a < 0$$

- $|0| = 0$

Ερώτηση 3

Να αναφέρετε τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών.

Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει:

1. $|\alpha| \geq 0$
2. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
3. $|\alpha| \geq \alpha, \quad |\alpha| \geq -\alpha$
4. $|\alpha|^2 = \alpha^2$
5. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
6. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$

Ερώτηση 4

Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| &= |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow \\ |\alpha \cdot \beta|^2 &= (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow \\ |\alpha \cdot \beta|^2 &= |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow \\ (\alpha \cdot \beta)^2 &= \alpha^2 \cdot \beta^2 \end{aligned}$$

που ισχύει.

Ερώτηση 5

Να αποδείξετε ότι

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| &= \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow \\ \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 &= \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^2 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 &= \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{aligned}$$

που ισχύει.

Ερώτηση 6

Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta|$, $|\alpha| + |\beta|$ είναι θετικοί αριθμοί έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow \\ |\alpha + \beta|^2 &\leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow \\ (\alpha + \beta)^2 &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow \\ \alpha\beta &\leq |\alpha||\beta| \end{aligned}$$

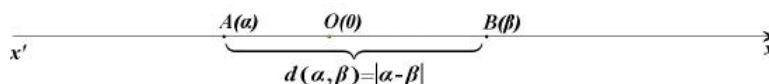
που ισχύει.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Ερώτηση 7

Πως ορίζεται η απόσταση μεταξύ δύο αριθμών;

Ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντιστοίχως.



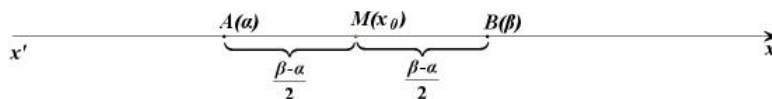
Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α και β , συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta|$. Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

Ερώτηση 8

Να αποδείξετε ότι το μέσο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ είναι $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ας ονομάσουμε A και B τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



Αν $M(x_0)$ είναι το μέσον του τμήματος AB, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} (MA) &= (MB) \Leftrightarrow \\ d(x_0, \alpha) &= d(x_0, \beta) \Leftrightarrow \\ |x_0 - \alpha| &= |x_0 - \beta| \Leftrightarrow \\ x_0 - \alpha &= \beta - x_0 \Leftrightarrow * \\ 2x_0 &= \alpha + \beta \Leftrightarrow \\ x_0 &= \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

$$* \alpha < x_0 < \beta \Rightarrow$$

$$x_0 - \alpha > 0 \Rightarrow |x_0 - \alpha| = x_0 - \alpha \text{ και}$$

$$x_0 - \beta < 0 \Rightarrow |x_0 - \beta| = -(x_0 - \beta) = \beta - x_0$$

Ο αριθμός $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσο του AB, ονομάζεται και κέντρο του διαστήματος

$[\alpha, \beta]$, ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$ λέγεται ακτίνα του $[\alpha, \beta]$.

Ερώτηση 9

Πως γράφεται η ανίσωση $|x - x_0| < \rho$ σε μορφή

- διαστήματος
- σε μορφή ανίσωσης χωρίς απόλυτο;

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - \rho < x < x_0 + \rho \\ x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \end{cases}$$

Ερώτηση 10

Πως γράφεται η ανίσωση $|x - x_0| > \rho$ σε μορφή

- διαστήματος
- σε μορφή ανίσωσης χωρίς απόλυτο;

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει:

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho \\ x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \end{cases}$$

Βιβλιογραφία:

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος, Υ.ΠΑΙ.Θ.

Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές