

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ερώτηση 1

Πως ορίζεται η τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού;

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α . Δηλαδή:

αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Ερώτηση 2

Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών;

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ για $\beta \neq 0$

Ερώτηση 3

Πως ορίζεται η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού;

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α . Δηλαδή:

αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt[n]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = \alpha$.

Επίσης γράφουμε $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$

Ερώτηση 4

Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τις ν-οστές ρίζες μη αρνητικών αριθμών;

- Αν $\alpha \geq 0$ τότε:
 - $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$

- $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$
- Από τις δύο παραπάνω σχέσεις, ισχύει ότι $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \sqrt[n]{\alpha^n}$
- Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος τότε:
 - $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$

Ερώτηση 5

Να αποδείξετε ότι $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} &= \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \\
 (\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n &= (\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta})^n \Leftrightarrow \\
 (\sqrt[n]{\alpha})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n &= \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \\
 \alpha \cdot \beta &= \alpha \cdot \beta \quad (\text{ισχύει})
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ισχύει:

$$\sqrt[n]{\alpha_1} \cdot \sqrt[n]{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{\alpha_k} = \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k}$$

Ερώτηση 6

Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$ για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} &= \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \\
 \left(\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}\right)^n &= \left(\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n \Leftrightarrow \\
 \frac{(\sqrt[n]{\alpha})^n}{(\sqrt[n]{\beta})^n} &= \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \\
 \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{ισχύει})
 \end{aligned}$$

Ερώτηση 7

Να αποδείξετε ότι $\sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot v]{\alpha}$ για κάθε $\alpha \geq 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}} &= \sqrt[\mu \cdot v]{\alpha} \Leftrightarrow \\ \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}}\right)^{\mu \cdot v} &= \left(\sqrt[\mu \cdot v]{\alpha}\right)^{\mu \cdot v} \Leftrightarrow \\ \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}}\right)^\mu\right]^v &= \alpha \Leftrightarrow \\ \left(\sqrt[v]{\alpha}\right)^\mu &= \alpha \Leftrightarrow \\ \alpha &= \alpha \text{ (ισχύει)}\end{aligned}$$

Ερώτηση 8

Να αποδείξετε ότι $\sqrt[v \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu}$ για κάθε $\alpha \geq 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt[v \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} &= \sqrt[v]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}}} \\ &= \sqrt[v]{\sqrt[\rho]{(\alpha^\mu)^\rho}} \\ &= \sqrt[v]{\alpha^\mu}\end{aligned}$$

Ερώτηση 9

Πως ορίζονται οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη;

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και v θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu}$$

Επιπλέον, αν μ, v θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{v}} = 0$.

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά.

Βιβλιογραφία:

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου, Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος, Υ.ΠΑΙ.Θ.

Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές