

§3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού (Τράπεζα θεμάτων)

1238**Θέμα 2ο**

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$

(Μονάδες 15)

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

1246**Θέμα 2ο**

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(Μονάδες 12)

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1250**Θέμα 2ο**

Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$$

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

(Μονάδες 8)

*Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1262****Θέμα 2ο**

Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $A + B = \frac{1}{2}$

ii. $A \cdot B = \frac{1}{20}$

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

β. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

(Μονάδες 9)

*Υλη: 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1264****Θέμα 2ο**Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.α. Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .

(Μονάδες 12)

β. Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

*Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1269****Θέμα 2ο**Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.α. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 .

(Μονάδες 6)

β. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 9)

γ. Να προσδιορίσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1280

Θέμα 2ο

Εστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

(Μονάδες 10)

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Υλη: 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1285

Θέμα 2ο

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

α. Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β. Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1288

Θέμα 2ο

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

- i. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

(Μονάδες 6)

- ii. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

(Μονάδες 9)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1290

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

(Μονάδες 13)

- β. Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1312

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

- α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

(Μονάδες 12)

- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 13)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1315

Θέμα 2ο

Εστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$$

- α. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

*Υλη: 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1316****Θέμα 2ο**Εστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.

(Μονάδες 10)

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

*Υλη: 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1331****Θέμα 2ο**α. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

(Μονάδες 9)

β. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| < 2$ (2).

(Μονάδες 9)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

*Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1332****Θέμα 2ο**α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση,

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 10)

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο (α') ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

(Μονάδες 15)

*Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1334****Θέμα 2ο**

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64.$$

(Μονάδες 8)

β. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 10)

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 7)

*Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1337****Θέμα 2ο**

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}, B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

α. να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

(Μονάδες 13)

*Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1346****Θέμα 2ο**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1348

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

(Μονάδες 9)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1349

Θέμα 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(Μονάδες 12)

β. Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1359

Θέμα 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του (α') ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

Υλη: 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1388

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 5)

β. Αν η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μία διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ. Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β'), να δείξετε ότι το τριώνυμο

$$(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1$$

είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό x .

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1404

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq 2$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 12\lambda + 25.$$

(Μονάδες 6)

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$.

(Μονάδες 4)

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$

(Μονάδες 8)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1406

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16.$$

(Μονάδες 5)

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ. Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε:

α. Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσεως του α.

(Μονάδες 2)

β. Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$.

(Μονάδες 8)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1407

Θέμα 4ο

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

- $t_A < t_B$
- $t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3}$
- $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$

α. α. Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$.

(Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β. Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$

α. Να γράψετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B .

(Μονάδες 5)

β. Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Μονάδες 5)

Υλη: 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών, 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1412

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. α βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α') ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

(Μονάδες 6)

γ. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α') ερώτημα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 6)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1418**Θέμα 4ο**

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά $d\text{ cm}$ ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d + 1)\text{ cm}$.

α. Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(Μονάδες 6)

β. Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

α. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

(Μονάδες 12)

β. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Μονάδες 7)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1431**Θέμα 4ο**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

α. Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

β. Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 5)

γ. Αν μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$.

β. Να βρείτε το λ .

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1437**Θέμα 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{A}$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.

(Μονάδες 9)

γ. Για $x \in \mathbb{A}$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

(Μονάδες 10)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1439

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφάσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ. Αν $\lambda < 0$, τότε:

α. Το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Μονάδες 6)

Υλη: 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1440

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 10)

β. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

α. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

- β. Να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογώνιου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 8)

- γ. Για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

Υλη: 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1445**Θέμα 4ο**

- α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

- β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι, αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1448**Θέμα 4ο**

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

- α. Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 10)

- β. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.

(Μονάδες 5)

- γ. Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1451**Θέμα 4ο**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

3. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1452

Θέμα 4ο

1. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

(Μονάδες 10)

2. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

(β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

(Μονάδες 8)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1456

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες?

(Μονάδες 6)

3. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$.

(Μονάδες 9)

Υλη: 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1459

Θέμα 4ο

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση $\lambda = (2x + 5)^2 - 8x$ (1).

1. Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος?

(Μονάδες 6)

2. Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος?

(Μονάδες 6)

3. Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

(α) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .

(Μονάδες 6)

(β) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

(Μονάδες 7)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1460

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

1. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

(Μονάδες 6)

2. Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

(Μονάδες 7)

3. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1). Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1461

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

2. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

3. Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

(α) οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

(β) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

(Μονάδες 12)

*Υλη: 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1463****Θέμα 4ο**

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

1. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

(Μονάδες 8)

2. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β .

(Μονάδες 10)

3. Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $(1+x_1)(1+x_2) \geq 4$.

(Μονάδες 7)

*Υλη: 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1469****Θέμα 4ο**

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

2. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 7)

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

*Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.***1475****Θέμα 4ο**

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

3. Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

4. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

(Μονάδες 6)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.**1476****Θέμα 4ο**

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

2. Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .

(α) Να δείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$3x^2 - \lambda x - 36 = 0.$$

(Μονάδες 7)

(β) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$.

(Μονάδες 4 + 6 = 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.**1477****Θέμα 4ο**

1. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

2. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι, αν $\gamma < 0$ τότε:

(α) $\beta^2 - 4\gamma > 0$

(Μονάδες 3)

(β) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.**1478****Θέμα 4ο**

1. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34 \text{ cm}$ και διαγώνιο $\delta = 13 \text{ cm}$.
 - (α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $E = 60 \text{ cm}^2$.
(Μονάδες 5)
 - (β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.
(Μονάδες 5)
 - (γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.
(Μονάδες 5)
2. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm .
(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1482

Θέμα 4ο

1. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.
(Μονάδες 10)
2. Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.
(Μονάδες 15)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1485

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 9)
2. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 4)
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
(Μονάδες 12)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1491

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

(α) να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$.

(Μονάδες 9)

(β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 \cdot x_2^2.$$

(Μονάδες 9)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1500

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

2. (α) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 2)

(β) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

3. (α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \quad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

(β) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

Υλη: 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

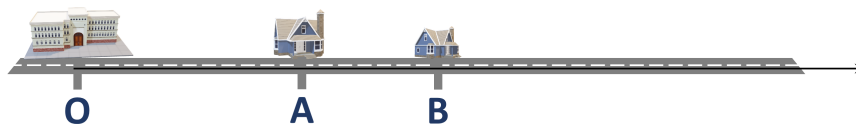
1504

Θέμα 4ο

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_G , και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $s_A < s_B$
- $s_\Gamma = \frac{s_A + s_B}{4}$ και
- $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



Σχήμα 1: Άσκηση 1504.

1. Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

2. Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A + s_B = 1,4$ και $s_A \cdot s_B = 0,45$ τότε:

(α) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B .

(Μονάδες 6)

(β) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ , και s_Δ .

(Μονάδες 7)

Υλη: 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών, 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1508

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

2. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

3. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

(α) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

(β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1509

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$.

(Μονάδες 10)

3. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|p_1 - p_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

Υλη: 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

1516

Θέμα 4ο

1. Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2)

(Μονάδες 10)

2. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4) με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι, αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε
- (α) $\rho \neq 0$ και

(Μονάδες 5)

- (β) ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Βιβλιογραφία:

Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας, ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ, Υ.Π.Α.Ι.Θ.

<http://iep.edu.gr/> - ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ (ΙΕΠ)

Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές

