

§6.1 Η έννοια της συνάρτησης (Τράπεζα θεμάτων)

1244**Θέμα 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

α. Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

(Μονάδες 13)

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

Υλη: 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1255**Θέμα 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 15)

β. Να δείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$.

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1263**Θέμα 2ο**

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0.8x$

α. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά?

(Μονάδες 12)

β. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α?

(Μονάδες 13)

Υλη: 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1283

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α. Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

Υλη: 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1295

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.

(Μονάδες 15)

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1297

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

(Μονάδες 10)

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1307**Θέμα 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$:

α. Να δείξετε ότι $\mu = -6$.

(Μονάδες 9)

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 9)

γ. Για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

Υλη: 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1354**Θέμα 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\mathbb{A}$.

(Μονάδες 5)

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$.

(Μονάδες 10)

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{A}$ ισχύει: $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$.

(Μονάδες 10)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1372**Θέμα 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f , με:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$$

α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 8)

β. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 8)

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

Υλη: 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών, 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 3.2 Η εξίσωση $f(x) = α$, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1385

Θέμα 2ο

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathbb{A}$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{A}$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1389

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+kx+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των k και λ .

(Μονάδες 9)

β. Για $k = 1$ και $\lambda = -2$:

1. Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

(Μονάδες 9)

2. Να δείξετε ότι: $g(\alpha+3) > g(\alpha)$, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$.

(Μονάδες 7)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1390

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+kx+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

(Μονάδες 9)

β. Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

1. Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

(Μονάδες 9)

2. Να δείξετε ότι: $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$.

(Μονάδες 7)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1454

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{\alpha}{4}}$

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

2. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της, χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

(Μονάδες 7)

2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

Υλη: 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 4.1 Ανισώσεις πρώτου βαθμού, 4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1467

Θέμα 4ο

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 300 \end{cases}$

α. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

1. έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

(Μονάδες 2)

2. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 3)

3. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β. Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$. Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

Υλη: 4.1 Ανισώσεις πρώτου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1479

Θέμα 4ο

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20 \cdot x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ?

(Μονάδες 5)

β. Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ?

(Μονάδες 5)

γ. Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10 \cdot x$, όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ. Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ.).

(Μονάδες 5)

Υλη: 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1495

Θέμα 4ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10).$$

(Μονάδες 9)

β. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.

(Μονάδες 8)

γ. Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$? Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

(Μονάδες 8)

Υλη: 3.3 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού, 4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1496**Θέμα 4ο**

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα "RED" χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα "YELLOW" χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

- α. 1. Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία "RED" για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

Πίνακας 1: Άσκηση 1496.

(Μονάδες 3)

2. Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία "YELLOW" για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
$f(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

Πίνακας 2: Άσκηση 1496.

(Μονάδες 3)

- β. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x), g(x)$.

(Μονάδες 8)

- γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας "RED" είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

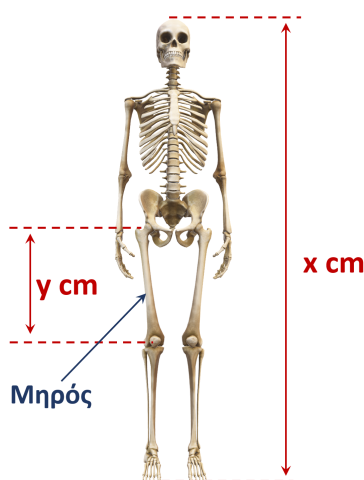
- δ. Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία "RED" και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

(Μονάδες 3)

Υλη: 3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.**1501****Θέμα 4ο**

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

- Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$
- Άνδρας: $y = 0,45x - 31$



Σχήμα 1: Άσκηση 1501.

- α. Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5\text{ cm}$ που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

- β. Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8\text{ cm}$ που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

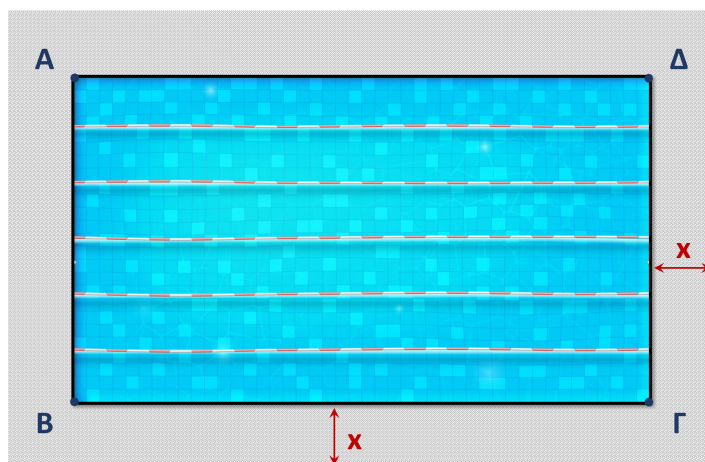
(Μονάδες 8)

- γ. Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

Υλη: 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.**1505****Θέμα 4ο**

Ενα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15 m και 25 m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2: Άσκηση 1505.

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$

(Μονάδες 9)

- β. Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 \text{ m}^2$.

(Μονάδες 7)

- γ. Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Υλη: 4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού. 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1506

Θέμα 4ο

Ενα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40 \text{ cm}$. Αν $x \text{ cm}$ είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε

- α. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$.

(Μονάδες 4)

- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20 \cdot x - x^2$.

(Μονάδες 8)

- γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$

(Μονάδες 6)

- δ. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

(Μονάδες 7)

Υλη: 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών. 4.1 Ανισώσεις πρώτου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1510

Θέμα 4ο

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

1. Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει v τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

2. Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

3. Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

1. να μην έχει ζημιά.

(Μονάδες 7)

2. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

(Μονάδες 8)

Υλη: 4.1 Ανισώσεις πρώτου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

1513

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x .

(Μονάδες 10)

- β. Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου $f(2, 999) \cdot f(-1, 002)$

(Μονάδες 7)

- γ. Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

(Μονάδες 8)

Υλη: 4.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού, 6.1 Η έννοια της συνάρτησης.

Βιβλιογραφία:

Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας, ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ, Υ.ΠΑΙ.Θ.

<http://iep.edu.gr/> - ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ (ΙΕΠ)

Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές

