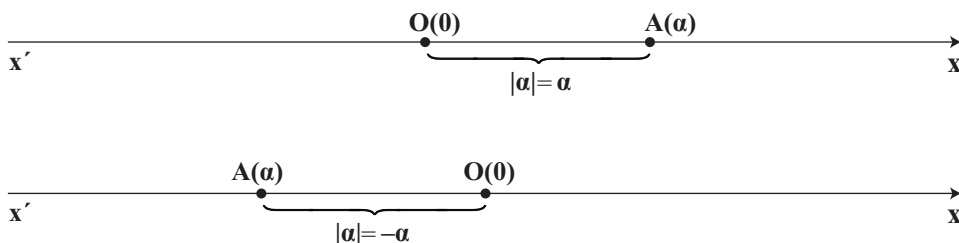


2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό a που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.



Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου A από την αρχή O , δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA , ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού a και συμβολίζεται με $|a|$.

Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι:

- $|2| = 2$, $\left|\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ και γενικά: $|a| = a$, για κάθε $a > 0$.

Δηλαδή:

Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- $|-2| = 2$, $\left|-\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ και γενικά: $|a| = -a$, για κάθε $a < 0$.

Δηλαδή:

Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$

Για παράδειγμα,

$$\checkmark |x| = 5 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = -5$$

$$\checkmark |\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta \text{ ή } \alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta \text{ ή } \alpha = \frac{4}{3}\beta$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$1. |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$2. \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

$$3. |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Οι ιδιότητες αυτές, όμως, μπορούν να αποδειχθούν και με τη βοήθεια των προηγούμενων συμπερασμάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |a \cdot b| = |a| \cdot |b| &\Leftrightarrow |a \cdot b|^2 = (|a| \cdot |b|)^2 \\ &\Leftrightarrow |a \cdot b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \\ &\Leftrightarrow (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|a + b| \leq |a| + |b|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |a+b| \leq |a| + |b| &\Leftrightarrow |a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a| \cdot |b| \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2|a||b| \\ &\Leftrightarrow ab \leq |a||b|, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

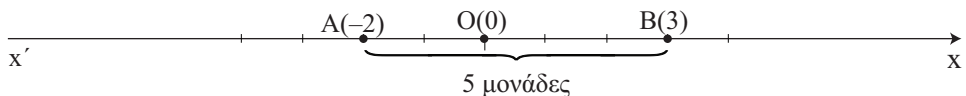
Είναι φανερό ότι η ισότητα $ab = |a||b|$ ισχύει αν και μόνο αν $ab \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί a και b είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες.
Συγκεκριμένα:
 $|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$
Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, έχουμε:
 $|a^n| = |a|^n$
- Η ανισότητα $|a + b| \leq |a| + |b|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους.
Συγκεκριμένα:
 $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

Απόσταση δυο αριθμών

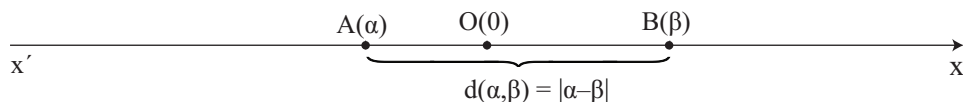
- Ας πάρουμε τώρα δυο αριθμούς, για παράδειγμα τους -2 και 3 , που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντιστοίχως.



Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών -2 και 3 . Παρατηρούμε ότι

$$(AB) = 5 = |(-2) - 3| = |3 - (-2)|.$$

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B αντιστοίχως.

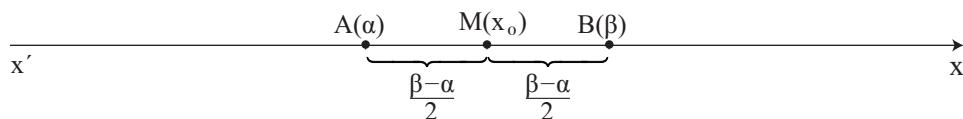


Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β , συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta|$. Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

Προφανώς ισχύει $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$. Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $\alpha < \beta$, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με $\beta - \alpha$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ας ονομάσουμε A και B τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



Αν $M(x_0)$ είναι το μέσον του τμήματος AB, τότε έχουμε

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)$$

$$\Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|$$

$$\Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0, \quad (\text{αφού } \alpha < x_0 < \beta)$$

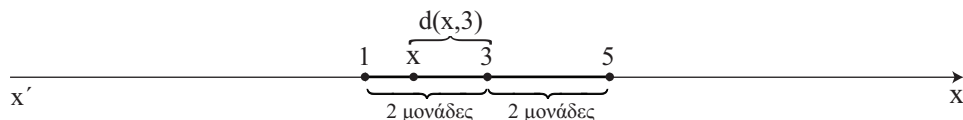
$$\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον M του τμήματος AB λέγεται **κέντρο** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του $[\alpha, \beta]$.

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β) , $[\alpha, \beta]$ και $(\alpha, \beta]$ ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

- Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| < 2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

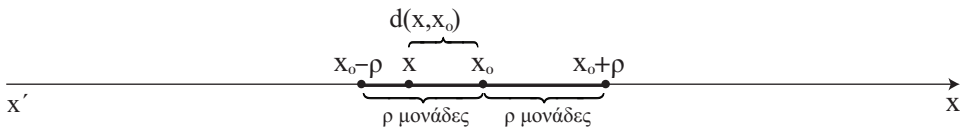
$$\begin{aligned} |x - 3| < 2 &\Leftrightarrow d(x, 3) < 2 \\ &\Leftrightarrow 3 - 2 < x < 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow x \in (3 - 2, 3 + 2) \end{aligned}$$

Γενικά:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \rho &\Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \\ &\Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho \end{aligned}$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| < \rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ .



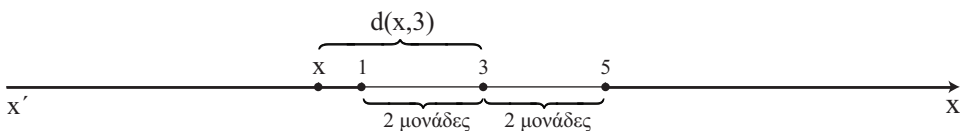
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε:

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho.$$

Για παράδειγμα,

$$|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2) \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

- Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| > 2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

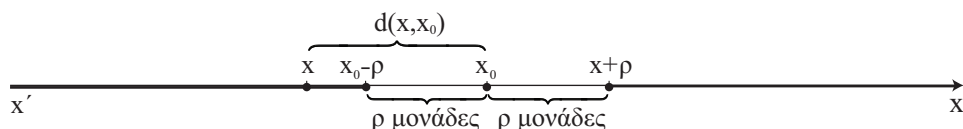
$$\begin{aligned} |x - 3| > 2 &\Leftrightarrow d(x, 3) > 2 \\ &\Leftrightarrow x < 3 - 2 \text{ ή } x > 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 3 - 2) \cup (3 + 2, +\infty). \end{aligned}$$

Γενικά:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$\begin{aligned} |x - x_0| > \rho &\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \\ &\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho \end{aligned}$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία $M(x)$ του άξονα $x'x$ που απέχουν από το σημείο $K(x_0)$ απόσταση μεγαλύτερη του ρ .



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

Για παράδειγμα:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi - 3|$

ii) $|\pi - 4|$

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi|$

iv) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$.

2. Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x - 3| + |x - 4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x - 3| - |4 - x|$, όταν:

i) $x < 3$

ii) $x > 4$.

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left| \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} \right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D .

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ		
Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x - 4 \leq 2$	$d(x, 4) \leq 2$	$[2, 6]$
$ x + 3 < 4$		
$ x - 4 > 2$		
$ x + 3 \geq 4$		
	$d(x, 5) < 1$	
	$d(x, -1) > 2$	
	$d(x, 5) \geq 1$	
	$d(x, -1) \leq 2$	
		$(-2, 2)$
		$[-5, 1]$
		$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι $|a - \beta| \leq |a - \gamma| + |\gamma - \beta|$.

2. Αν $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \alpha = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$$

$$\text{ii) } \beta = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$$

3. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y :

i) Η ισότητα $|x| + |y| = 0$;

ii) Η ανισότητα $|x| + |y| > 0$;

4. Έστω $0 < \alpha < \beta$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$1, \frac{\alpha}{\beta} \text{ και } \frac{\beta}{\alpha}.$$

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ό,τι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$.

5. Αν $|x - 2| < 0,1$ και $|y - 4| < 0,2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:

