

# ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

## Κεφάλαιο 3ο

### 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

#### Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής  $ax + \beta = 0$  για συγκεκριμένους αριθμούς  $a, \beta$ , με  $a \neq 0$ .

Γενικότερα τώρα, θα δούμε πώς με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων, επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση, οποιοδήποτε και αν είναι οι αριθμοί  $a, \beta$ .

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} ax + \beta = 0 &\Leftrightarrow ax + \beta - \beta = -\beta \\ &\Leftrightarrow ax = -\beta \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν  $a \neq 0$  τότε:

$$ax = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$$

Επομένως, αν  $a \neq 0$  η εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, την  $x = -\frac{\beta}{a}$ .

- Αν  $a = 0$ , τότε η εξίσωση  $ax = -\beta$  γίνεται  $0x = -\beta$ , η οποία:
  - i. αν είναι  $\beta \neq 0$  δεν έχει λύση και γι' αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**, ενώ
  - ii. αν είναι  $\beta = 0$  έχει τη μορφή  $0x = 0$  και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης  $ax + \beta = 0$  και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Για παράδειγμα

- ✓ Για την εξίσωση  $4(x - 5) = x - 5$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
 4(x-5) &= x-5 \Leftrightarrow 4x-20 = x-5 \\
 &\Leftrightarrow 4x-x = 20-5 \\
 &\Leftrightarrow 3x = 15 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{15}{3} = 5.
 \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την  $x = 5$ .

- ✓ Για την εξίσωση  $3x - x - 3 = 2x$ . Έχουμε
 
$$3x - x - 3 = 2x \Leftrightarrow 3x - x - 2x = 3 \Leftrightarrow 0x = 3$$
 που είναι αδύνατη.
- ✓ Για την εξίσωση  $4(x-5) - x = 3x - 20$  έχουμε
 
$$4x - 20 - x = 3x - 20 \Leftrightarrow 4x - x - 3x = 20 - 20 \Leftrightarrow 0x = 0$$
 που είναι ταυτότητα.

### ΣΧΟΛΙΟ

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής  $ax + b = 0$ , της οποίας οι συντελεστές  $a$  και  $b$  είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές  $a$  και  $b$  της εξίσωσης  $ax + b = 0$  εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

έχει παράμετρο το  $\lambda$  και γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 (\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \\
 &\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)x = \lambda - 1
 \end{aligned}$$

Επομένως

- ✓ Αν  $\lambda \neq -1$  και  $\lambda \neq 1$ , η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

- ✓ Αν  $\lambda = -1$ , η εξίσωση γίνεται  $0x = -2$  και είναι αδύνατη.
- ✓ Αν  $\lambda = 1$ , η εξίσωση γίνεται  $0x = 0$  και είναι ταυτότητα.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Ένας ποδηλάτης πήγε από μια πόλη Α σε μία πόλη Β και επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο. Στη μετάβαση οδηγούσε με μέση ταχύτητα 25 km/h και ξεκουράστηκε ενδιάμεσα 1 ώρα. Στην επιστροφή οδηγούσε με μέση ταχύτητα 20 km/h και δεν έκανε καμία στάση. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες, να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ.

**ΛΥΣΗ**

Αν  $x$  km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης χρειάστηκε  $\frac{x}{25}$  ώρες για να πάει από το Α στο Β και  $\frac{x}{20}$  ώρες για να επιστρέψει. Αφού ξεκουράστηκε και 1 ώρα, ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν  $\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1$ .

Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 = 10$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 &= 10 \Leftrightarrow 4x + 5x + 100 = 1000 \\ &\Leftrightarrow 9x = 900 \\ &\Leftrightarrow x = 100\end{aligned}$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.

**Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού**

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν εξισώσεις 1ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο**

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}.$$

**ΛΥΣΗ**

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε  $x \neq 1$ . Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x-1} - 1 &= \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)\frac{x^2}{x-1} - (x-1) = (x-1)\frac{1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0, \text{ αφού } x \neq 1.\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την  $x = 0$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x - 1| = |x + 3|.$$

#### ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|2x - 1| = |x + 3| \Leftrightarrow 2x - 1 = x + 3 \text{ ή } 2x - 1 = -(x + 3)$$

Όμως:

$$\checkmark \quad 2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\checkmark \quad 2x - 1 = -(x + 3) \Leftrightarrow 2x + x = -3 + 1 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και  $-\frac{2}{3}$ .

#### ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής  $|f(x)| = |g(x)|$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x - 3| = 3x - 2.$$

#### ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x - 2 \geq 0 \quad (1)$$

Με αυτό τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$$\begin{array}{ll}
 |2x - 3| = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 3x - 2 & \text{ή} \quad 2x - 3 = 2 - 3x \\
 \Leftrightarrow 2x - 3x = -2 + 3 & \text{ή} \quad 2x + 3x = 2 + 3 \\
 \Leftrightarrow -x = 1 & \text{ή} \quad 5x = 5 \\
 \Leftrightarrow x = -1 & \text{ή} \quad x = 1
 \end{array}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η  $x = 1$ , διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

### ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε εξισώσεις της μορφής  $|f(x)| = g(x)$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$

ii)  $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

iii)  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60}$

iv)  $1,2(x+1) - 2,5 + 1,5x = 8,6$ .

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4$

ii)  $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$ .

3. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

i)  $(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

ii)  $(\lambda - 2)x = \lambda$

iii)  $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

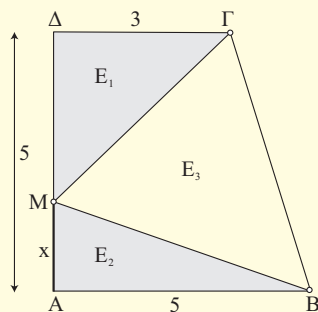
iv)  $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda$ .

4. Στο διπλανό ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου M στην AD ώστε για τα εμβαδά

$E_1 = (M\hat{\Delta}\Gamma)$ ,  $E_2 = (M\hat{A}B)$  και  $E_3 = (M\hat{B}\Gamma)$  να ισχύει:

i)  $E_1 + E_2 = E_3$

ii)  $E_1 = E_2$ .



5. Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε σε μια τράπεζα προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175 € τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

6. Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή:

$$\text{i)} v = v_0 + \alpha t, \alpha \neq 0 \quad (\text{ως προς το } t) \quad \text{ii)} \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{ως προς το } R_1).$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0 \quad \text{ii)} (x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0.$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0 \quad \text{ii)} (x+1)^2 + x^2 - 1 = 0.$$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \quad \text{ii)} (x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2).$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{ii)} x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0.$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x} \quad \text{ii)} \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0.$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \text{i)} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{2}{x^2-1} & \text{ii)} \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} &= \frac{x-4}{x^2+2x} \\ \text{iii)} \frac{1}{x+2} &= \frac{x}{x^2-4} & \text{iv)} \frac{x^2-x}{x^2-1} &= \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

13. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το γινόμενό τους.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} |2x-3|=5 \quad \text{ii)} |2x-4|=|x-1| \quad \text{iii)} |x-2|=2x-1 \quad \text{iv)} |2x-1|=x-2.$$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} \frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ii)} \frac{2|x|+1}{3} - \frac{|x|-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i)} \left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4$$

$$\text{ii)} |x-1||x-2| = |x-1|.$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$\text{i)} (x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)$$

$$\text{ii)} \frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha}$$

έχουν πάντα λύση, οποιοδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ .

2. Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να έχει λύση η εξίσωση

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1;$$

3. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οиноπνεύματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινόπνεύματος περιεκτικότητας 32%;

4. Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με 100km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120km/h προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1km;

5. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{x^2-\alpha^2}$  για όλες τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

6. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+4$ .

7. Να λύσετε την εξίσωση  $|2x|-1=3$ .

8. Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x^2-2x+1} = |3x-5|$ .