

4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι της μορφής $ax + \beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμα).

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1).$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

✓ Επειδή

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

το $x-1$ είναι θετικό για $x > 1$, μηδέν για $x = 1$ και αρνητικό για $x < 1$.

✓ Επειδή

$$x^2+x-6 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 2,$$

το x^2+x-6 είναι θετικό για $x < -3$ και για $x > 2$, μηδέν για $x = -3$ και για $x = 2$ και αρνητικό για $-3 < x < 2$.

✓ Επειδή το $2x^2+x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου $P(x)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
x^2+x-6	+	0	-	0	+
$2x^2+x+1$	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

Ωστε το γινόμενο $P(x)$ είναι θετικό για $-3 < x < 1$ και για $x > 2$, ενώ είναι αρνητικό για $x < -3$ και για $1 < x < 2$. Τέλος είναι μηδέν για $x = -3$, για $x = 1$ και για $x = 2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0)

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0), όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1) < 0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή, αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το γινόμενο $P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$ είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του $P(x)$ διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$.

Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (< 0)

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0,$$

αφού καμία από τις λύσεις της $A(x) \cdot B(x) > 0$ και της $A(x) \cdot B(x) < 0$ δεν μηδενίζει το $B(x)$.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} > 0.$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1) > 0,$$

δηλαδή με την $P(x) > 0$, η οποία, από τον πίνακα προσήμου του $P(x)$ αληθεύει όταν $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0.$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0$. Έχουμε:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4) \geq 0 \text{ και } x^2 + 3x - 4 \neq 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ είναι οι 1 και 3, ενώ του τριωνύμου $x^2 + 3x - 4$ είναι οι 1 και -4.

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

$$P(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4)$$

x	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$	
x^2-4x+3	+	+	0	-	0	+
x^2+3x-4	+	0	-	0	+	+
P(x)	+	-	-	-	+	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup [3, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1).$$

2. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (-x^2 + 4)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1).$$

3. Να λύσετε την ανίσωση $(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9) > 0$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $(3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3) \leq 0$.

5. Να λύσετε την ανίσωση $(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0$.

6. Να λύσετε την ανίσωση $(x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \frac{x-2}{x+1} > 0 \qquad \text{ii)} \frac{2x+1}{x-3} \leq 0.$$

8. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \frac{2x+3}{x-1} > 4 \qquad \text{ii)} \frac{x-2}{3x+5} \leq 4.$$

2. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x^2 - 3x - 10}{x-1} + 2 \leq 0$.

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \qquad \text{ii)} \frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2}.$$

4. Να λύσετε την ανίσωση $\left| \frac{x+1}{x} \right| > 2$.

5. Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης των λαμπτήρων είναι x ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος K και τα αντίστοιχα έσοδα E (σε χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους $K = 7 - x$ και $E = 5x - x^2$. Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες η εταιρεία έχει κέρδος.

6. Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείται ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο.

Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση σ ενός φαρμάκου, t ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται από τον τύπο $\sigma = \frac{20t}{t^2 + 4} \text{ mgr / lt}$.

Αν για το συγκεκριμένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι 4 mgr / lt , να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο σ .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

1. Αν η ανίσωση $-x^2 + 2x + \gamma \geq 0$ είναι αδύνατη τότε:

- A) $\gamma > -1$ B) $\gamma = -1$ Γ) $\gamma < -1$ Δ) $\gamma \geq -1$.

2. Αν η ανίσωση $x^2 - 2x + \gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- A) $\gamma < 1$ B) $\gamma = 1$ Γ) $\gamma > 1$ Δ) $\gamma \leq 1$.

3. Αν η ανίσωση $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- A) $\lambda > 0$ B) $\lambda < 0$ Γ) $\lambda = 1$ Δ) $\lambda = 0$.

4. Η εξίσωση $|x - 1| + |x - 5| = 4$ αληθεύει αν και μόνο αν:

- A) $x < 1$ B) $x > 5$ Γ) $1 \leq x \leq 5$ Δ) $1 < x < 5$.

5. Η εξίσωση $|x - 1| = x - 1$:

- A) Είναι αδύνατη B) Έχει μοναδική λύση τη $x = 1$
Γ) Έχει άπειρες λύσεις Δ) Είναι ταυτότητα.

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Η ανίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 > 0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. A Ψ

2. Η ανίσωση $\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 5 \leq 0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. A Ψ

3. Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ

4. Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \leq 0$ και $x - 1 \leq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ

5. Οι ανισώσεις $\frac{2x-1}{x+1} > 1$ και $2x - 1 > x + 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ

6. Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ

7. Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ

8. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ και $(x - 2)(x - 1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A Ψ

9. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} < 0$ και $(x-2)(x-1) < 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

10. Οι ανισώσεις $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x+1}$ και $(x+1)^2 < (x-1)(x+1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α Ψ

III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α' ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β' ομάδα.

Α' ΟΜΑΔΑ	
1	$-2x^2 + 6x - 4$
2	$x^2 - 3x + 2$
3	$-x^2 + 3x - 2$
4	$2x^2 - 6x + 4$

Β' ΟΜΑΔΑ	
Α	$(x-1)(x-2)$
Β	$-(x-1)(x-2)$
Γ	$2(x-1)(x-2)$
Δ	$-2(x-1)(x-2)$

IV. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η ανίσωση $(2x-6)(x-1) > 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(2x-6)(x-1) > 0 \Leftrightarrow 2x-6 > 0 \text{ και } x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ και } x > 1 \Leftrightarrow x > 3.$$

Όμως ο αριθμός 0, αν και είναι μικρότερος του 3, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

2. Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Όμως ο αριθμός -1, αν και είναι μεταξύ του -2 και του 2, δεν επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

3. Η ανίσωση $(x+2)^2(x-1) \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(x+2)^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Όμως ο αριθμός -2, αν και είναι μικρότερος του 1, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.