

Αλγεβρική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

- Οι βασικές μέθοδοι αλγεβρικής επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με 2 αγνώστους είναι δύο:
 - ✓ Η μέθοδος της **αντικατάστασης**
 - ✓ Η μέθοδος των **αντίθετων συντελεστών**

(Το ποια μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε είναι προσωπική επιλογή του καθενός! Όλα τα συστήματα λύνονται και με τις 2 μεθόδους! Υπάρχουν στοιχεία τα οποία μας βοηθάνε να επιλέξουμε την καταλληλότερη ώστε να έχουμε μία όσο το δυνατόν πιο απλή και εύκολη επίλυση)

- **Αδύνατο σύστημα:** Αν κατά την διαδικασία επίλυσης μία εξίσωση του συστήματος πάρει την μορφή $0x + 0y = \gamma$ με $\gamma \neq 0$ τότε αυτή είναι προφανώς αδύνατη, οπότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.
- **Αόριστο σύστημα:** Αν κατά την διαδικασία επίλυσης μία εξίσωση του συστήματος πάρει την μορφή $0x + 0y = 0$, τότε αυτή παραλείπεται και το σύστημα απαρτίζεται από μία μόνο γραμμική εξίσωση, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι **αόριστο**.

❖ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$$

Λύση

1^ο Βήμα

Παρατηρώ σε ποια από τις 2 εξισώσεις υπάρχει άγνωστος με συντελεστή το 1! Επιλέγω την 1η εξίσωση την λύνω ως προς x (εξίσωση 1^{ου} βαθμού) και αντικαθιστώ όπου x στην 2^η:

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ (20 - y) + 3y = 44 \end{cases}$$

2° Βήμα

Λύνω τη 2^η ως προς y

$$\begin{cases} x = 20 - y \\ 2y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ y = 12 \end{cases}$$

3° Βήμα

Αντικαθιστώ την τιμή του y που βρήκα στην 1^η εξίσωση και βρίσκω το x

$$\begin{cases} x = 20 - 12 \\ y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (8, 12)$.

(Σημείωση: Αυτό σημαίνει ότι αν αντικαταστήσουμε στο σύστημα όπου $x=8$ και $y=12$ το επαληθεύουν!)

❖ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -3x + 10y = -5 \end{cases}$

Λύση:

1° Βήμα

Παρατηρώ τις 2 εξισώσεις και αποφασίζω ποιον από τους 2 αγνώστους x ή y θέλω να απαλείψω. Επιλέγω εδώ τον x. Οι συντελεστές του x στις 2 εξισώσεις είναι 2 και -3 αντίστοιχα. Βρίσκω το Ε.Κ.Π(2, 3)= 6. Στόχος μου είναι τα δύο x να αποκτήσουν αντίθετους συντελεστές. Οπότε, πολλαπλασιάζω την επάνω εξίσωση με 3 και την κάτω με 2. Δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x - 6y = 4 & \xrightarrow{(* 3)} \\ -3x + 10y = -5 & \xrightarrow{(* 2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 18y = 12 \\ -6x + 20y = -10 \end{cases}$$

2° Βήμα

Προσθέτω κατά μέλη τις 2 εξισώσεις

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 18y = 12 \\ \cancel{-6x} + 20y = -10 \end{cases}$$

$$(+)\quad +2y = 2 \quad \text{Οπότε } y=1$$

3^ο Βήμα

Αντικαθιστώ σε μία από τις 2 αρχικές εξισώσεις

$$\begin{cases} 2x - 6 \cdot 1 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (5, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα και με τις 2 μεθόδους:

- i. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$
- ii. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 24 \end{cases}$
- iii. $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα (με όποια μέθοδο επιθυμείτε):

- i. $\begin{cases} -3x + y = 11 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$
- ii.
- iii. $\begin{cases} 3x - 2y = y + 3 \\ x + y - 1 = 2(x - 1) \end{cases}$
- iv. $\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases}$
- v. $\begin{cases} 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \end{cases}$