**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**
**69$^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**"Ο ΘΑΛΗΣ"**
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008**

# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

# Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**1.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

**Λύση**

$$\mathrm{A} = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = \left(4 \cdot 25\right)^2 + 502 + \left(27 - 25\right) \cdot 249 - 10^4$$
$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

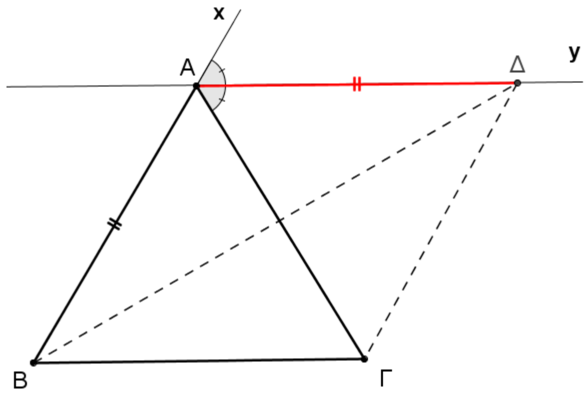
**2.** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $\mathrm{A}y$ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

**(α)** Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

**(β)** Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.



Σχήμα 1

**Λύση**

**(α)** Επειδή η $\mathrm{A}y$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$ θα είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Delta\hat{\mathrm{A}}x$ είναι $59^\circ$.

Επειδή είναι $\mathrm{A}y \parallel \mathrm{B}\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{\mathrm{B}} = \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 59^0.$$

**(β)** Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}. \qquad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και $\mathrm{A}y$ έχουμε ότι

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

**3.** Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό $\alpha$ ισχύει: $\frac{21}{5}<\frac{42}{\alpha}<\frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστα σης

$$A=\alpha+5(4+\alpha)+3(\alpha-4)+1919 .$$

**Λύση**

Έχουμε:

$$\frac{21}{5}<\frac{42}{\alpha}<\frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10}<\frac{42}{\alpha}<\frac{42}{8} \Leftrightarrow 8<\alpha<10,$$

οπότε θα είναι $\alpha=9$, αφού $\alpha$ θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$A=9+5(4+9)+3(9-4)+1919=9+5\cdot 13+3\cdot 5+1919=2008.$$

**4.** Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

**Λύση**

Αν είναι $A_1$ ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο $A_1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} A_1=\pi o\lambda.5+3 \\ A_1=\pi o\lambda.7+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A_1-3=\pi o\lambda.5 \\ A_1-3=\pi o\lambda.7 \end{matrix}\right\},$$

οπότε ο αριθμός $A_1-3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $A_1-3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός $A_1$ θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100<A<200 \Rightarrow \frac{60}{100}\cdot 100<\frac{60}{100}\cdot A<\frac{60}{100}\cdot 100 \Rightarrow 60<A_1<120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό $A_1$ είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός $A_1$ είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $A_1=108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$A=108\cdot\frac{100}{60}=180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2\cdot 108=216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$K=216\cdot\frac{100}{80}=270.$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

# Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**1.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad \mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του $x$.

**Λύση**

Επειδή $1-(-1)^{2009}=1-(-1)=2\neq 0$ έχουμε $\left[1-(-1)^{2009}\right]^0=1$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}=\frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4-3^4+x=x.$$

Επίσης έχουμε

$$\mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}=\frac{(4+1)^2}{5}+\frac{x}{2}=5+\frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\Leftrightarrow x=5+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2x=10+x\Leftrightarrow x=10.$$

**2.** Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2,4\lambda-1))$, όπου $\lambda$ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων $Oxy$. Να βρεθούν:

**(α)** ο θετικός ακέραιος *λ,*

**(β)** το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ,

**(γ)** το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α προς τους θετικούς ημιάξονες $Ox$ και $Oy$, αντίστοιχα.

**Λύση**

**(α)** Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda+2>0 \text{ και } 4\lambda-1>0\Leftrightarrow \lambda<2 \text{ και } \lambda>\frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο $\lambda$ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda=1$.

**(β)** Για $\lambda=1$ είναι $\mathrm{A}(1,3)$, οπότε

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

**(γ)**

$$\mathrm{E}(\mathrm{OAB\Gamma})=1\cdot 3=3$$

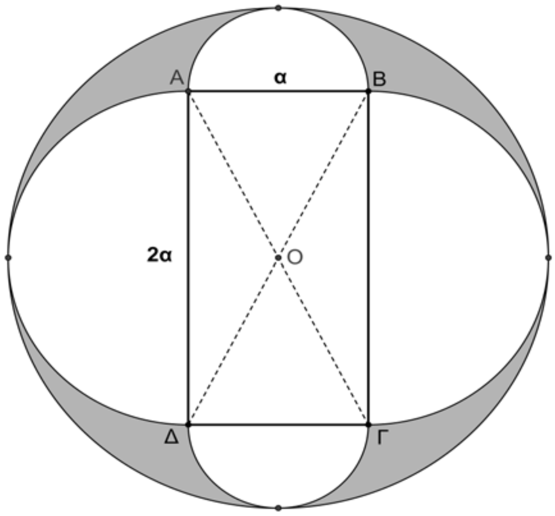
**3.** Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του $\alpha$ το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

**Λύση**

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα $\alpha$.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2=\frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$, τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων




Σχήμα 2

$2\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2=\pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\frac{9\pi\alpha^2}{4}-\frac{\pi\alpha^2}{4}-\pi\alpha^2-2\alpha^2=\frac{4\pi\alpha^2-8\alpha^2}{4}=(\pi-2)\alpha^2.$$

**4.** Αν ισχύει $\frac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\frac{45^\nu.2^{2\nu}}{6^\nu}=900\Leftrightarrow\frac{45^\nu\cdot 4^\nu}{6^\nu}\Leftrightarrow\left(\frac{45\cdot 4}{6}\right)^\nu=900\Leftrightarrow 30^\nu=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2.$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu=(2\cdot 3\cdot 5)^2\Leftrightarrow 30^\nu=30^2\Leftrightarrow 30^{\nu-2}=1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\nu-2=0\Leftrightarrow\nu=2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $\nu-2$ η τιμή της δύναμης $30^{\nu-2}$ δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^2-(-1)^{2+1}+4(-1)^{2+2}=2003\cdot 1-(-1)+4\cdot 1=2003+1+4=2008..$$

# Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**1.** Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού $x$ προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού $x$. Να βρεθεί ο αριθμός $x$.

**Λύση**

Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+1255=x \Leftrightarrow x-\frac{x}{8}-\frac{x}{4}=1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8}=1255 \Leftrightarrow x=\frac{1255\cdot 8}{5}=2008.$$

**2.** Να προσδιορίσετε τους ακέραιους $x, y$ και $z$ που είναι τέτοιοι ώστε:

$$0 \le x \le y \le z,$$
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44.$$

**Λύση**

Η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} & xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44 \\ \Leftrightarrow\ & xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=45 \\ \Leftrightarrow\ & xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (xy+x+y+1)(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(y+1)(z+1)=45. \qquad (1) \end{aligned}$$

Επειδή οι $x, y, z$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x \le y \le z$, έπεται ότι:

$$1 \le x+1 \le y+1 \le z+1. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) και αφού $45 = 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ προκύπτουν οι περιπτώσεις

$$(x+1, y+1, z+1)=(1,3,15) \text{ ή } (1,5,9) \text{ ή } (3,3,5) \text{ ή } (1,1,45)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,\ 2,\ 14) \text{ ή } (0,\ 4,\ 8) \text{ ή } (2,\ 2,\ 4) \text{ ή } (0,0,44).$$

**3.** Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

**Λύση**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $ΑΒ = ΑΓ$ ).

**1η περίπτωση.**

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΒΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

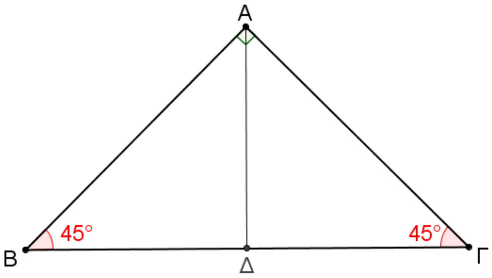
- Αν είναι $Β\hat{Α}Δ = \hat{Β}$ και $Γ\hat{Α}Δ = Γ\hat{Δ}Α$ τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) : $\hat{Α}_1 = \hat{Β} = \hat{Γ} = \hat{x}$ και $\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_1 = 2\hat{x}$, (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=180$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x}=180^o \Leftrightarrow \hat{x}=36^o.$$

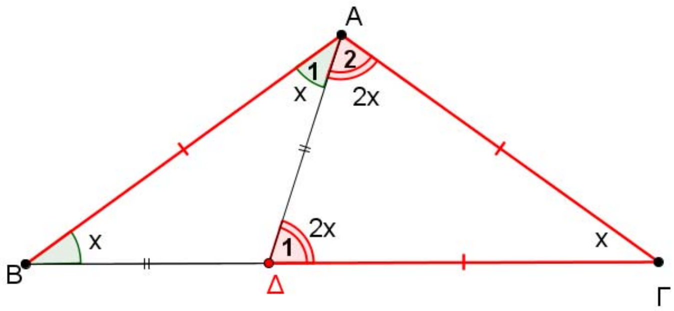
Στη περίπτωση αυτή είναι $\hat{Α}=108^o$ και $\hat{Β}=\hat{Γ}=36^o$.

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ με ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}$, τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο ΑΒΓ.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma\Delta$ με ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A$, τότε προκύπτουν οι γωνίες $\hat{A} = 90^{\circ}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^{0}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες $\hat{B} = B\hat{A}\Delta$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma$ έπεται ότι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} \Rightarrow 180^{o} - \hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 90^{o}$, οπότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^{o}$.




Σχήμα 3α




Σχήμα 3β

**2η περίπτωση.**

Θεωρούμε σημείο $\Delta$ στη πλευρά $A\Gamma$ ώστε τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $A\hat{B}\Delta = \hat{A}$ και $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$, τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

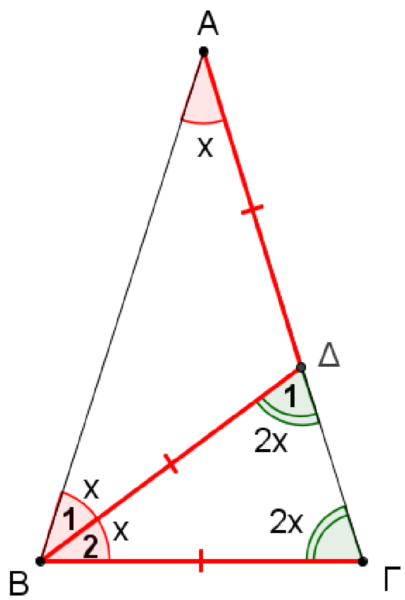
$$\hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$$

$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε

$$\hat{x} + \hat{B}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 2x \Rightarrow \hat{B}_2 = x.$$

Από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{0}$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

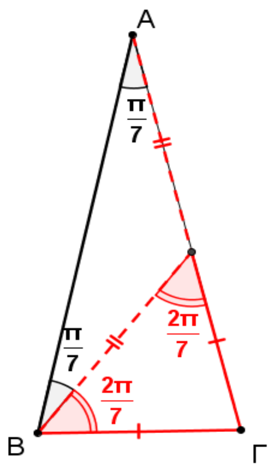



$$5\hat{x} = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{x} = 36^{o}.$$

Σχήμα 4

Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{A} = 36^{o} \text{ και } \hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^{o}.$$




Σχήμα 5

- Αν $A\hat{B}\Delta = \hat{A} = x$ και $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta = y$, τότε θα έχουμε $y = 2x$ και $3x + 2y = \pi$ .οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{A} = \frac{\pi}{7},\ \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$

**4.** Αν οι πραγματικοί αριθμοί $x, y$ και $z$ ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

**(α)** $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

**(β)** Ένας τουλάχιστον από τους $x, y, z$ ισούται με 0.

**Λύση**

**(α)** Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$x + y + z = 0, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι $z = -(x + y)$ και

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + \left[-(x+y)\right]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x+y) \\ &= -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned}$$

**(β)** Από την ισότητα $x + y + z = 0$ προκύπτει ότι $z = -x - y$, οπότε η ισότητα $x^2 - y = z^2$ γίνεται

$$x^2 - y = (x+y)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow y \cdot (y + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1.$$

- Για $y = 0$ λαμβάνουμε $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$, οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,0,0) \text{ ή } (1,0,-1).$$

- Για $y = -2x - 1$ από την (1) λαμβάνουμε

$$z = -x - y = x + 1,$$

οπότε με αντικατάσταση των $y, z$ στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,-1,1) \text{ ή } (-1,1,0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους $x, y, z$ ισούται με 0.

**$2^{ος}$ τρόπος για το (β)**

Οι δεδομένες ισότητες $x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2$ με πολλαπλασιασμό επί $y^2$, $z^2$ και $x^2$, αντίστοιχα, γίνονται

$$\left(x^2 - z^2\right)y^2 = y^3,\ \left(y^2 - x^2\right)z^2 = z^3, \left(z^2 - y^2\right)x^2 = x^3,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε $xyz = 0$, δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους $x, y, z$ ισούται με 0.

# Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**1.** Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

**Λύση**

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής: $100x+15$, όπου $x$ μη αρνητικός ακέραιος.
Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$S=(100x_1+15)+(100x_2+15)+\cdots+(100x_{15}+15)=100(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+15\cdot 15=$$
$$=25\cdot 4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+25\cdot 9=25\cdot\left[4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+9\right],$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 25.

**Παρατήρηση**

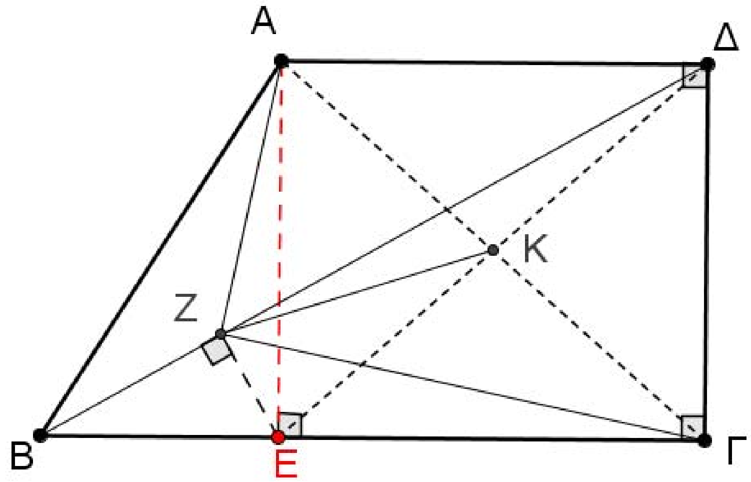
Η "κεντρική ιδέα" της άσκησης είναι ότι: <u>ο</u> θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta$", έχει τη μορφή $100x+\overline{\alpha\beta}$.
Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta\gamma$", έχει τη μορφή $1000x+\overline{\alpha\beta\gamma}$.

**3.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΑΕ και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ$.

**Λύση (1ος τρόπος)**

Επειδή είναι $Α\hat{Ε}Γ=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$ το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται, δηλαδή το σημείο Κ είναι μέσον των ΑΓ και ΕΔ και

$$ΑΓ=ΕΔ. \qquad (1)$$

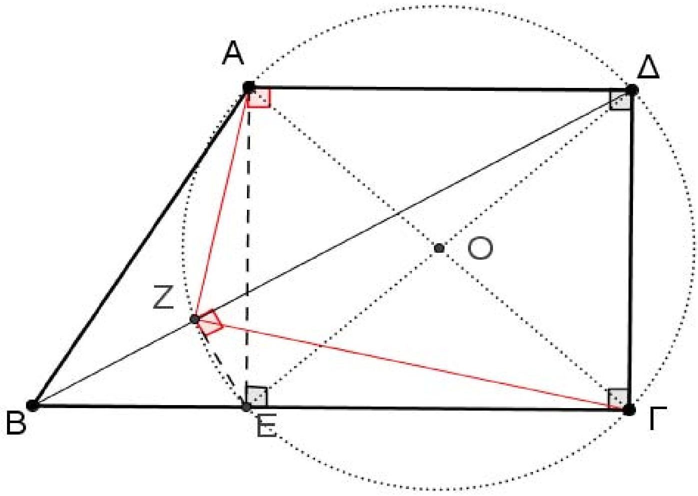



Σχήμα 6

Επειδή είναι $ΕΖ\perp ΒΔ$ το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ορθογώνιο και η ΖΚ είναι η διάμεσος αυτού προς την υποτείνουσα. Άρα είναι

$$ΖΚ=\frac{ΕΔ}{2}. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $ZK = \frac{A\Gamma}{2}$, δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου $AZ\Gamma$ προς την πλευρά $A\Gamma$ ισούται με το μισό της πλευράς $A\Gamma$. Επομένως είναι $A\hat{Z}\Gamma = 90^\circ$.



Σχήμα 7

**2$^{ος}$ Τρόπος**

Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του $O$.

Εφόσον $E\hat{Z}\Delta = E\hat{A}\Delta = 90^o$, το τετράπλευρο $EZA\Delta$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια τα σημεία $A, \Delta, \Gamma, E, Z$ είναι ομοκυκλικά. Άρα $A\hat{Z}\Gamma = 90^o$ (διότι βαίνει στη διάμετρο $A\Gamma$).

**3.** Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων $(x, y, z)$ με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$
$$x+y+z=300.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2 \Leftrightarrow x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y=2$$
$$\Leftrightarrow (x^2y-y^2x)-(x^2z-y^2z)+(z^2x-z^2y)=2$$
$$\Leftrightarrow xy(x-y)-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[xy-z(x+y)+z^2\right]=2 \Leftrightarrow (x-y)(xy-zx-zy+z^2)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z)=2.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον, από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι

$$x-y \geq 0 \text{ και } x-z \geq y-z > 0$$

και αφού

$$(x-y)+(y-z)=x-z,$$

έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$ είναι:

$$x-y=1, y-z=1, x-z=2.$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνουμε:

$$x-y=1,\ y-z=1 \Leftrightarrow x=y+1,\ z=y-1,$$

όπου $y$ θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x,y,z)=(k+1,k,k-1),\ \text{όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Από την εξίσωση $x+y+z=300$ λαμβάνουμε:

$$(k+1)+k+(k-1)=300 \Leftrightarrow 3k=300 \Leftrightarrow k=100,$$

οπότε η ζητούμενη τριάδα είναι μόνον η

$$(x,y,z)=(101,\ 100,\ 99).$$

**4.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB$. Θεωρούμε τυχόν σημείο $M$ εκτός του $AB$ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το $M$ προς την ευθεία $AB$ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $AB$. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέτοια ώστε

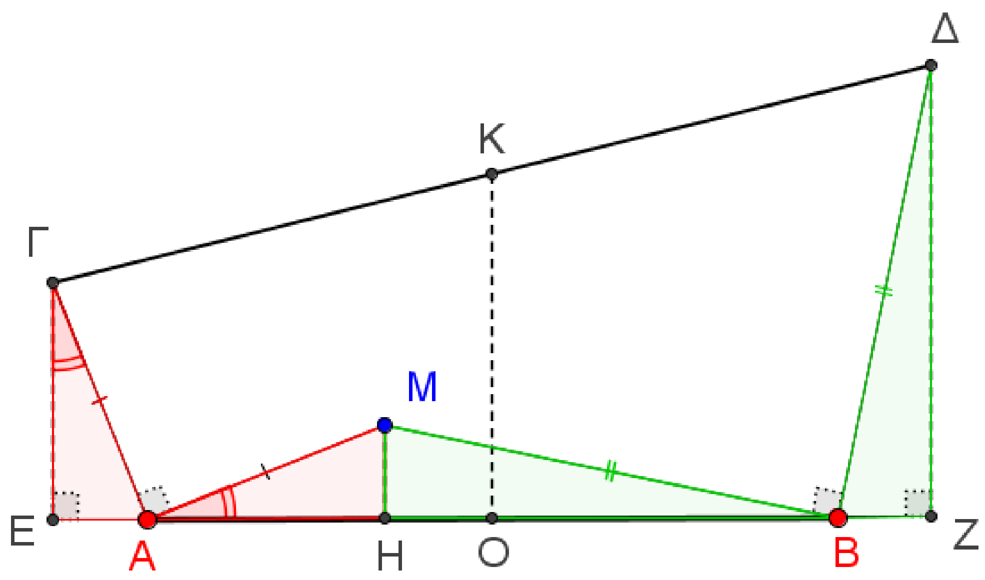
$$A\Gamma \perp AM \text{ και } A\Gamma = AM,\quad B\Delta \perp MB \text{ και } B\Delta = MB,$$

και επιπλέον τα σημεία $\Gamma$, $M$ και $\Delta$ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία $AB$. Να αποδείξετε ότι το μέσον $K$ του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου $M$.

**Λύση**

Από τα σημεία $\Gamma$, $M$ και $\Delta$ φέρουμε καθέτους $\Gamma E$, $MH$ και $\Delta Z$ προς την ευθεία $AB$. Τότε οι οξείες γωνίες $M\hat{A}H$ και $A\hat{\Gamma}E$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $M\hat{B}H$ και $B\hat{\Delta}Z$. Έτσι από την υπόθεση $A\Gamma = AM$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $AHM$, $\Gamma EA$ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Gamma E = AH \qquad (1)$$
$$EA = MH. \qquad (2)$$




Σχήμα 8

Ομοίως από την υπόθεση $B\Delta = MB$ και $B\Delta \perp MB$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $MHB$, $BZ\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta Z = HB \qquad (3)$$
$$BZ = MH. \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2}. \tag{5}$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2} = \frac{\mathrm{AH} + \mathrm{HB}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}. \tag{6}$$

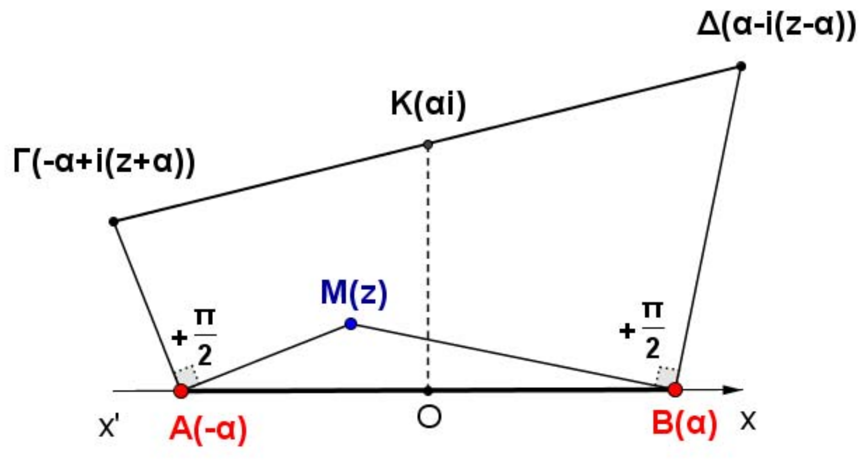
Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}. \tag{7}$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το μισό του ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

**2ος τρόπος**

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ ως άξονα των πραγματικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z$, το σημείο Β είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού $a$, οπότε το σημείο Α θα είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού $-a$. Τότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $z+a$ και επειδή είναι $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM}$, $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AM}$ έπεται ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right) = 90^\circ$, οπότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $i(z+a)$. Επομένως στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, άρα και στο σημείο Γ, αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $-a + i(z+a)$.




Σχήμα 9

Με το ίδιο σκεπτικό, αλλά με την παρατήρηση ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}}\right) = -90^\circ$, καταλήγουμε ότι στο σημείο Δ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $a - i(z-a)$.

Επομένως το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{-a + i(z+a) + a - i(z-a)}{2} = ai,$$

οπότε το σημείο Κ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μιγαδικού αριθμού $z$, άρα ανεξάρτητο από τη θέση του σημείο Μ.

# Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**1.** Αν οι θετικοί ακέραιοι $\alpha$ και $\beta$ έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

**Λύση**

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών $\alpha, \beta$ και των αριθμών Α και Β ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος $\delta$ είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών $\alpha, \beta$. Τότε από τις σχέσεις $\delta | \alpha$ και $\delta | \beta$ λαμβάνουμε ότι ο $\delta$ διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους , οπότε

$$\delta | (4\alpha + 5\beta) = \mathrm{A} \text{ και } \delta | (3\alpha + 4\beta) = \mathrm{B},$$

δηλαδή ο $\delta$ είναι κοινός διαιρέτης των Α και Β.

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος $\delta$ είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων Α και Β. Τότε από τις υποθέσεις $\delta | \mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta$ και $\delta | \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta$ έπεται ότι $\delta | \mathrm{A} - \mathrm{B} = \alpha + \beta$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta | 5(\mathrm{A} - \mathrm{B}) - \mathrm{A} = \alpha \quad \text{και} \quad \delta | \mathrm{A} - 4(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \beta ,$$

οπότε ο $\delta$ είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών $\alpha$ και $\beta$.

Επομένως και οι αριθμοί Α και Β έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

**2.** Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου $n$ θετικός ακέραιος.

**Λύση**

Έχουμε $\mathrm{A} = n(n - 1) + 1$ και $\mathrm{B} = n(n + 1) + 1$, οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων $n(n - 1)$ και $n(n + 1)$ είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι $\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2n > 0$, οπότε $\mathrm{A} < \mathrm{B}$. Έστω $\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2\kappa - 1)$, όπου κ θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών Α και Β. Τότε πρέπει

$$\mathrm{A}+(2\kappa-1) = \mathrm{B} - 1,$$

δηλαδή

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2\kappa \Leftrightarrow 2n = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών Α και Β βρίσκονται $n$ άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι

$$\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2n - 1),$$

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma = n\mathrm{A} + [1 + 3 + \ldots + (2n - 1)] = n^3 - n^2 + n + \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^3 + n .$$

**3.** Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων $(x, y, z)$ με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

**Λύση**

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:

$$
\begin{aligned}
xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x) &= x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2 \\
&= xy(x-y)+(x-y)z^2-\left(x^2-y^2\right)z \\
&= (x-y)\left[xy+z^2-xz-yz\right] \\
&= (x-y)\left[x(y-z)-z(y-z)\right] \\
&= (x-y)(y-z)(x-z).
\end{aligned}
$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z)=6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι $x-y \geq 0$ και $x-z \geq y-z > 0$, και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$, είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \qquad (1)$$

$$\text{ή } \; x-y=2, y-z=1, x-z=3 \qquad (2)$$

$$\text{ή } \; x-y=1, y-z=1, x-z=6 \qquad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά , αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:

  $$x-y=1, \;\; y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1, \;\; z=y-2,$$

  όπου $y$ θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

  $$(x,y,z)=(k+1,k,k-2), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:

  $$(x,y,z)=(k+2,k,k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+1,k,k-2), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+1)^2+k^2+(k-2)^2=3k^2-2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς $k$ και έχει ελάχιστο για $k=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2-2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του $S$ λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(1,0,-2)$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+2,k,k-1), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+2)^2+k^2+(k-1)^2=3k^2+2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς $k$ και έχει ελάχιστο για $k=-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2+2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(-1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του $S$ λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(2,0,-1)$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες

$$(x,y,z)=(1,0,-2) \text{ και } (x,y,z)=(2,0,-1).$$

**4.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\text{ΑΓ} \perp \text{ΑΜ} \text{ και } \text{ΑΓ} = 2\cdot\text{ΑΜ}\ ,\ \text{ΒΔ} \perp \text{ΜΒ} \text{ και } \text{ΒΔ} = 2\cdot\text{ΜΒ}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

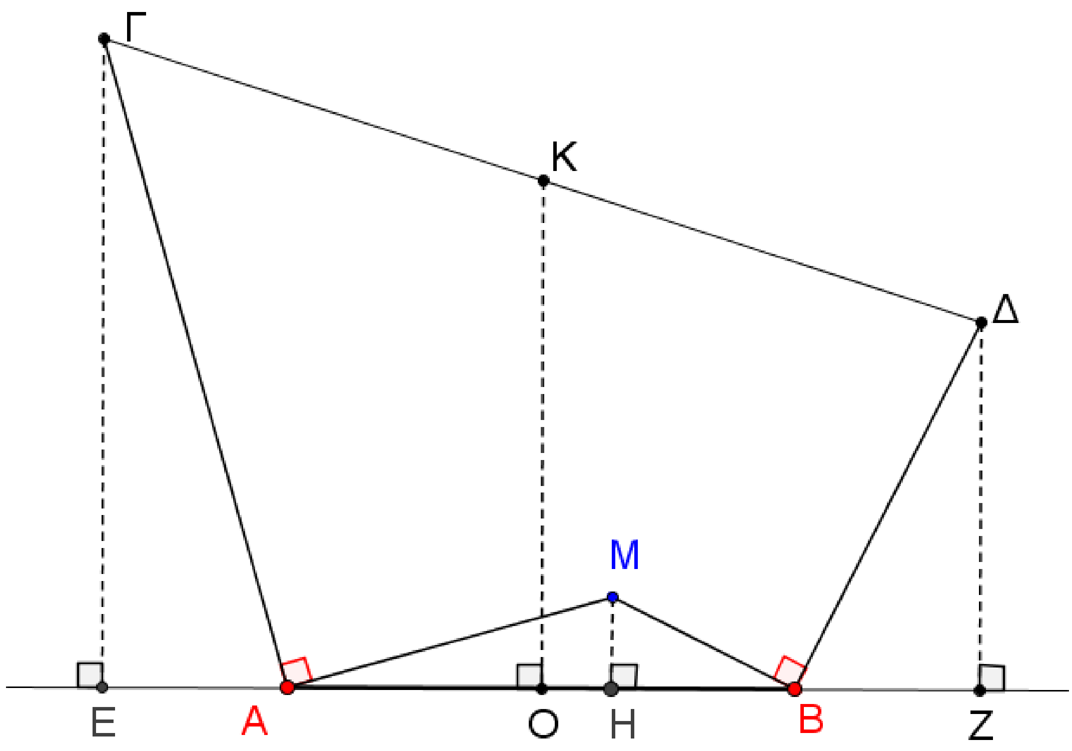
**Λύση**

Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$ και $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Β}}\text{Η}$ και $\text{Β}\hat{\Delta}\text{Ζ}$ . Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\Gamma\text{Ε}}{\text{ΑΗ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΜΗ}}=\frac{\text{Α}\Gamma}{\text{ΑΜ}}=2,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\Gamma\text{Ε} = 2\cdot\text{ΑΗ} \qquad (1)$$
$$\text{ΕΑ} = 2\cdot\text{ΜΗ}\ . \qquad (2)$$




Σχήμα 10

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$\mathrm{\Delta Z} = 2 \cdot \mathrm{HB} \tag{3}$$

$$\mathrm{BZ} = 2 \cdot \mathrm{MH}\,. \tag{4}$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{OK} = \frac{\mathrm{\Gamma E} + \mathrm{\Delta Z}}{2}\,. \tag{5}$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\mathrm{OK} = \frac{\mathrm{\Gamma E} + \mathrm{\Delta Z}}{2} = \frac{2 \cdot \mathrm{AH} + 2 \cdot \mathrm{HB}}{2} = \frac{2 \cdot \mathrm{AB}}{2} = \mathrm{AB}\,. \tag{6}$$

Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}\,. \tag{7}$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

**Παρατήρηση**

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.