ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad \mathrm{B} = \left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11} = 24:6+25-2\cdot 8+8:4+\frac{9}{11} = 4+25-16+2+\frac{9}{11}$$

$$=15+\frac{9}{11}=15\frac{9}{11}.$$

$$\mathrm{B} = \left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7} = \left(32+112\right):3^2-1+\frac{5}{7} = 144:9-1+\frac{5}{7} = 16-1+\frac{5}{7}$$

$$=15+\frac{5}{7}=15\frac{5}{7}.$$

Έχουμε: $\mathrm{A}-\mathrm{B} = 15\frac{9}{11}-15\frac{5}{7} = 15+\frac{9}{11}-15-\frac{5}{7} = \frac{9}{11}-\frac{5}{7} = \frac{63-55}{77} = \frac{8}{77} > 0$,
οπότε θα είναι $\mathrm{A} > \mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha = 6$ μέτρα και πλάτος $\beta = 4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:
(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\left(\alpha+\beta\right) = 2\left(6+4\right) = 20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $\mathrm{E} = \alpha\beta = 6\cdot 4 = 24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6+6\cdot\frac{20}{100} = 6+1,2 = 7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4-4\cdot\frac{5}{100} = 4-0,2 = 3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$\Pi' = 2(7,2+3,8) = 2 \cdot 11 = 22$ μέτρα, οπότε η αύξησή της είναι

$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2$ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$E' = 7,2 \cdot 3,8 = 27,36$ τετρ.μέτρα, οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι

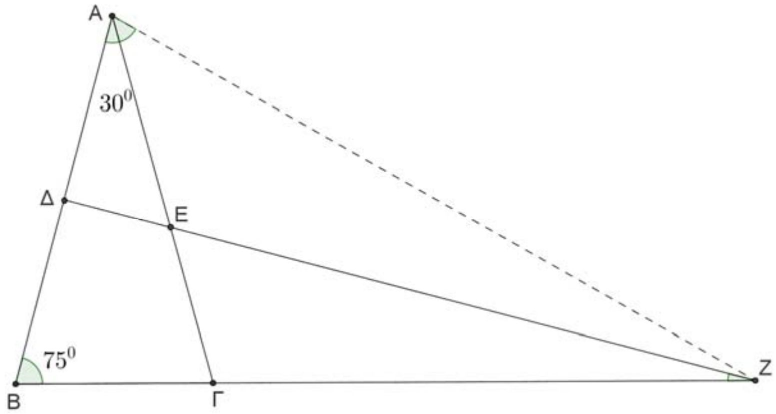
$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36$ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι

$$\frac{E' - E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ θα έχει τις απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A = \frac{180^\circ - B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΒ θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι ΖΑ = ΖΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $B\hat{A}Z = A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma = 75^\circ$. Τότε θα είναι $A\hat{Z}B = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη ΖΔ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΖΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας του $A\hat{Z}B$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\Delta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{\Delta}Z = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}Z$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}Z = B\hat{A}Z - B\hat{A}\Gamma = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$.

Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης . $\text{Α}=\frac{a-1}{\alpha-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$, αν $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Λύση

Έχουμε $a=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1}=\frac{16}{81}$ και

$$\text{Α}=\frac{a-1}{a-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}=\frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3}+\frac{1}{33}+\frac{16}{81}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$$

$$=\frac{\frac{65}{16}}{\frac{33}{16}}+\frac{1}{33}+\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{65}{33}+\frac{1}{33}+\frac{9}{27}=\frac{66}{33}+\frac{9}{27}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Πρόβλημα 2ο

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\dfrac{28}{\nu}$ και $\gamma=\dfrac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha=4,\ \text{για}\ \nu=7,\ \alpha=2,\ \text{για}\ \nu=14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma=6, \text{για}\ \nu=7,\ \ \gamma=3,\ \text{για}\ \nu=14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha=4,\ \gamma=6,$ για $\nu=7$ και $\alpha=2,\ \gamma=3,$ για $\nu=14.$

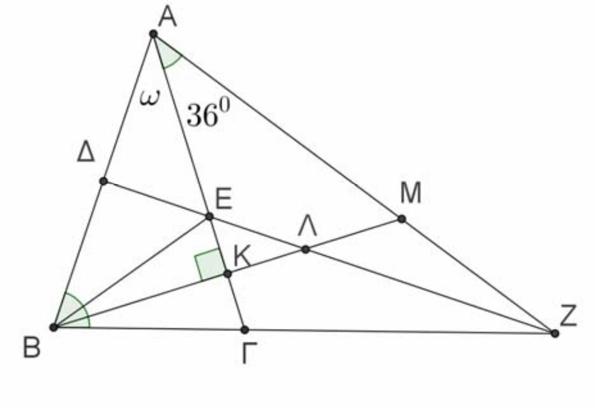
Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z}=36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega=36^\circ$, **(β)** ΑΜ = ΓΖ, **(γ)** ΒΛ = ΛΖ.

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ θα έχουμε:

$$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-\omega}{2}.$$

Επειδή η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ, το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΖΑ = ΖΒ, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{Z\hat{A}B}=\mathrm{Z\hat{B}A}\Leftrightarrow \omega+36^\circ=\hat{\mathrm{B}}\Leftrightarrow \omega+36^\circ=\frac{180^\circ-\omega}{2}\Leftrightarrow 3\omega=108\Leftrightarrow \omega=36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{B}K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \mathrm{A\hat{M}K}.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΒ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = ΑΓ. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΒ έχουμε

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = 180^\circ - 2\hat{\mathrm{B}} = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓΑΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ. Άρα έχουμε:

ΑΜ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΖ.

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε: $\Lambda\mathrm{BZ} = \mathrm{KB}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Άρα έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Lambda\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 18^\circ \Rightarrow \Lambda\mathrm{BZ}$ ισοσκελές τρίγωνο με ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = (x+y)\cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.
Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w=1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m. Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z=4, m=5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x+y=2+3=5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5\cdot 4^5 - 1 = 5\cdot 1024 - 1 = 5119$.
Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w=5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z=1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x+y$ είναι $x+y=2+3=5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5\cdot 1^4 - 5 = 0$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Λύση. Έχουμε:

$$2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x + x^2 - 1 < x^2 + x - 2 + \lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 > 2x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2} < x < \lambda - 1,$, εφόσον ισχύει:

$$\lambda - 1 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} x + y - 1 = 6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{4}{y+2} = 11 \end{array} \right\}$

Λύση

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 3, y \neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3} = a$ και $\frac{1}{y+2} = b$, οπότε

$$x + y - 1 = (x-3) + (y+2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}..$$

Επομένως, με περιορισμό $a, b \neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{6}{ab} \\ 3a - 4b = 11 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b = 6 \\ 3a - 4b = 11 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 6 - b \\ 3(6-b) - 4b = 11 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 6 - b \\ 7b = 7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 1 \end{array} \right\},$$

οπότε $x = \frac{16}{5}, y = -1$, που πληρούν τους περιορισμούς.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x + y + x^2 + y^2 = p,$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x + x^2 + y + y^2 = p \Leftrightarrow x(x+1) + y(y+1) = p \quad (1)$

Όμως οι αριθμοί $x(x+1)$, $y(y+1)$ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων **είναι και οι δύο άρτιοι**, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p = 2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x+1)$, $y(y+1)$ **είναι άρτιοι μη αρνητικοί**, έχουμε:

$$x(x+1) + y(y+1) = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x+1) = 2 \\ y(y+1) = 0 \end{array} \right\} (\Sigma_1) \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x(x+1) = 0 \\ y(y+1) = 2 \end{array} \right\} (\Sigma_2)$$

Έχουμε

$$x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ και } y(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1.$$

Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει τις λύσεις:

$$(x, y) = (1, 0) \text{ ή } (1, -1) \text{ ή } (-2, 0) \text{ ή } (-2, -1)$$

Ομοίως, για το σύστημα (Σ_2) βρίσκουμε τις λύσεις:

$$(x, y) = (0, 1) \text{ ή } (-1, 1) \text{ ή } (0, -2) \text{ ή } (-1, -2).$$

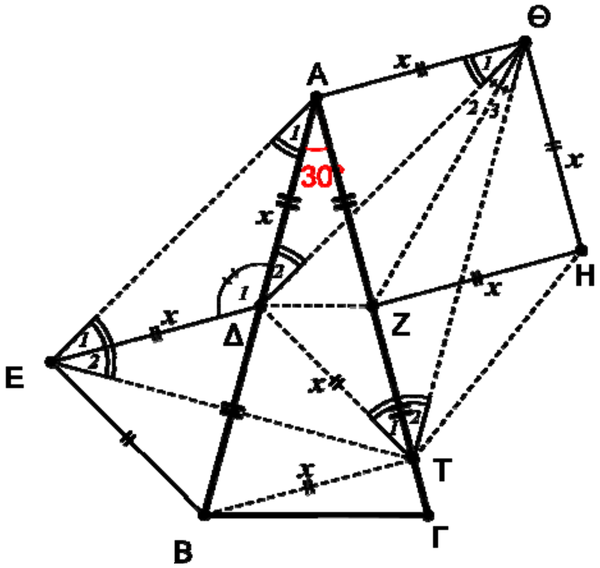
Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^o$. Έστω Δ, Z τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$ και τετράγωνο $AZH\Theta$. Η μεσοκάθετη του $B\Delta$, τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο AET είναι ισόπλευρο,

(β) τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta E = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^o$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^o.$$

Η ET είναι μεσοκάθετη της $B\Delta$, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$) έχουμε:

$$\hat{E}_2 = \frac{B\hat{E}\Delta}{2} = 30^o.$$

Στο τρίγωνο AET έχουμε, $E\hat{A}T = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^o$ και $A\hat{E}T = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^o$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η AB είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της ET. Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \qquad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και $A\Delta T$ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \Delta\hat{A}\Theta = A\hat{\Delta}T = 120^o.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = AT \qquad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}T = 180^o - \hat{\Delta}_2 - B\hat{\Delta}T = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o.$$

$$A\hat{T}B = \hat{T}_1 + B\hat{T}\Delta = 30^o + 60^o = 90^o.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

Παρατήρηση. Επιπλέον, στο σημείο Z τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Theta T$, δηλαδή το σημείο Z είναι έκκεντρο του τριγώνου $\Delta\Theta T$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}^2} + \sqrt{\mathrm{x}^4 + 32\mathrm{y}^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y.

Λύση

Έχουμε ότι $x^4 + 5x^2 + 2y^2 = x^4 + 5x^2 + 4 - x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$, οπότε

$$\sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} = x^2 + 2.$$

Επιπλέον $x^4 + 32y^2 = \left(4 - 2y^2\right)^2 + 32y^2 = 16 + 16y^2 + 4y^4 = 4\left(y^2 + 2\right)^2$, οπότε

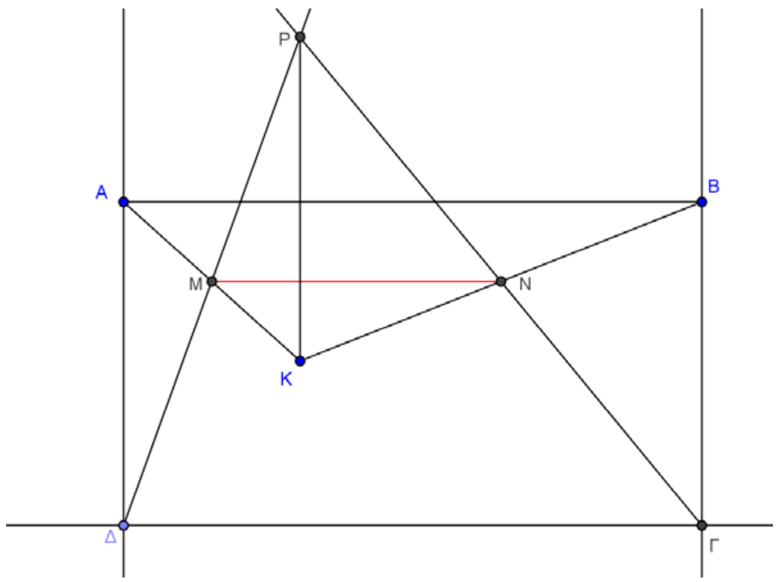
$$\sqrt{x^4 + 32y^2} = 2(y^2 + 2).$$

Συνεπώς $\mathrm{A} = x^2 + 2 + 2(y^2 + 2) = x^2 + 2y^2 + 6 = 4 + 6 = 10$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ και σημείο K στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα $\mathrm{M, N}$ των $\mathrm{AK, BK}$ αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες $\mathrm{\Gamma N, \Delta M}$ τέμνονται στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\mathrm{\Gamma\Delta}$.

Λύση



Σχήμα 4

Στο τρίγωνο AKB το τμήμα MN συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα $\mathrm{MN} // \mathrm{AB}$ και $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$. Όμως το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $\mathrm{AB} = \mathrm{\Gamma\Delta}$, επομένως $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{2}$ και επιπλέον $\mathrm{AB} // \mathrm{\Gamma\Delta}$ οπότε και $\mathrm{MN} // \mathrm{\Gamma\Delta}$. Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα $\mathrm{PMN, P\Delta\Gamma}$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{MN}}=2$, οπότε θα είναι και $\frac{\mathrm{P}\Delta}{\mathrm{PM}}=2$ οπότε το Μ είναι το μέσον του $\mathrm{P}\Delta$. Άρα στο τετράπλευρο $\mathrm{PA}\Delta\mathrm{K}$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, $\mathrm{PK} // \mathrm{A}\Delta$, οπότε, αφού $\mathrm{A}\Delta \perp \Gamma\Delta$, έπεται ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}, \frac{a+2}{5}, a$.

(β) Να βρείτε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3},\quad 2(3x-a)+x>2(x+1)-a,\quad a-x\le 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α.

Λύση

(α) Αφού $a>0$, έχουμε: $\frac{5a}{2}-a=\frac{3a}{2}>0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2}>a$. Επίσης, έχουμε

$a>\frac{a+2}{5}\Leftrightarrow 5a>a+2\Leftrightarrow 4a>2\Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$, που ισχύει αφού ο a είναι θετικός ακέραιος Άρα $a>\frac{a+2}{5}$.

Επομένως έχουμε τη διάταξη: $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$.

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3}\Leftrightarrow 9x-3a-3x\le 4x+2a\Leftrightarrow 2x\le 5a\Leftrightarrow x\le\frac{5a}{2}$.
- $2(3x-a)+x>2(x+1)-a\Leftrightarrow 6x-2a+x>2x+2-a\Leftrightarrow 5x>a+2\Leftrightarrow x>\frac{a+2}{5}$.
- $a-x\le 2(x-a)\Leftrightarrow a-x\le 2x-2a\Leftrightarrow 3a\le 3x\Leftrightarrow x\ge a$.

Επειδή ισχύει ότι $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις είναι: $\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le\frac{5a}{2},\ a\in\mathbb{Z}_+^*\right\}=\left[a,\frac{5a}{2}\right],\ a\in\mathbb{Z}_+^*.$.

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου Α. Αν αυτοί είναι m και Μ, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακέραιων που περιέχονται στο σύνολο Α είναι: $(M-m)+1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a=2k, k\in\mathbb{N}^*$. Τότε $\mathrm{A}=[2k,5k]$, οπότε περιέχει $3k+1=\frac{3a}{2}+1$ ακέραιους.
- $a=2k+1, k\in\mathbb{N}$. Τότε $\mathrm{A}=\left[2k+1,5k+\frac{5}{2}\right]=\left[2k+1,5k+2+\frac{1}{2}\right]$, οπότε περιέχει $3k+1+1=\frac{3(a-1)}{2}+2=\frac{3a}{2}+\frac{1}{2}$ ακέραιους.

Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma : \begin{cases} \alpha\sqrt[3]{\mathrm{b}} - \mathrm{c} = \alpha \\ \mathrm{b}\sqrt[3]{\mathrm{c}} - \alpha = \mathrm{b} \\ \mathrm{c}\sqrt[3]{\alpha} - \mathrm{b} = \mathrm{c} \end{cases}$$

Λύση

Αν κάποιος από τους a,b,c είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε $a=b=c=0$ είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι $a,b,c>0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο c είναι μεγαλύτερος ή ίσος των a,b. Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε $\alpha\sqrt[3]{\mathrm{b}} = \alpha + \mathrm{c} \geq 2\alpha$, οπότε $\sqrt[3]{b} \geq 2$, δηλαδή $b \geq 8$ (1).

Οπότε θα είναι $c \geq 8$ (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $b = b\sqrt[3]{c} - a \geq 2b - a$, οπότε $a \geq b$ και από την (1) έχουμε $a \geq 8$. Η τελευταία τώρα δίνει $c = c\sqrt[3]{a} - b \geq 2c - b$, οπότε $b \geq c$.

Επομένως, τελικά έχουμε $b \geq c \geq a \geq b$, δηλαδή $a=b=c$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $a\sqrt[3]{a} = 2a$ και αφού $a>0$, έχουμε ότι $a=8$, οπότε $a=b=c=8$ είναι λύση.

Τελικά οι δύο λύσεις είναι $(a,b,c) \in \{(0,0,0),(8,8,8)\}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma, -\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta, -\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma < 0 < \beta < \alpha < \delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ που περνάει από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση:

$$y - \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} \right)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

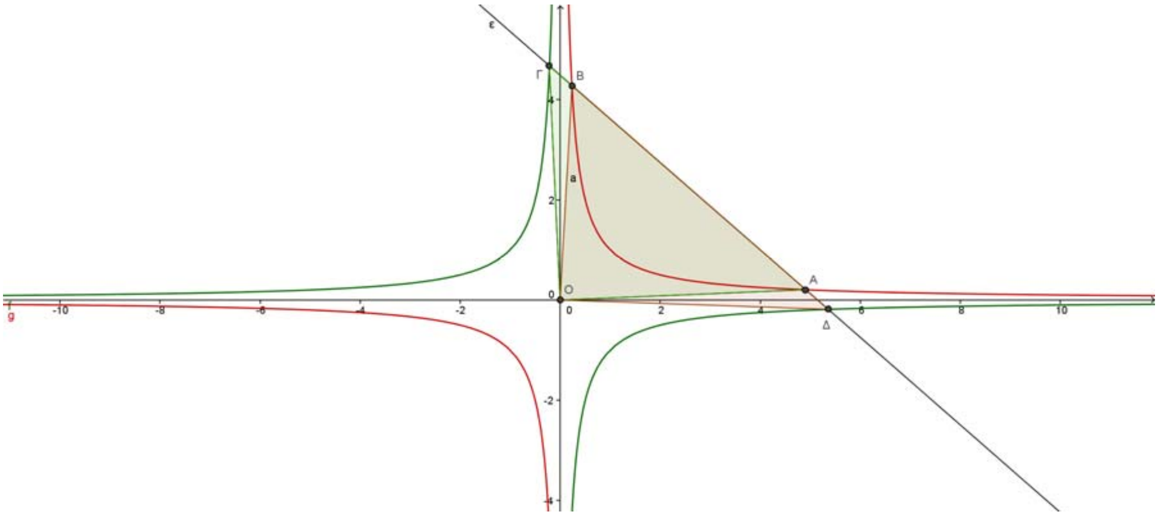
Η ευθεία $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ που περνάει από τα σημεία Γ και Δ έχει εξίσωση:

$$y+\frac{1}{\gamma}=\left(\frac{-\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\gamma}}{\delta-\gamma}\right)(x-\gamma)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\gamma\delta}x-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}.$$

Επειδή οι ευθείες ε_{AB} και $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ συμπίπτουν, έπεται ότι:

$$-\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\gamma\delta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta},$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα: $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.



Σχήμα 5

(ii) Τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ έχουν τετμημένες $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\frac{\gamma+\delta}{2}$ οι οποίες λόγω της (i) ταυτίζονται, οπότε τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο, έστω Μ. Τότε, δεδομένης της διάταξης των σημείων πάνω στην ευθεία ε που προκύπτει από τις συνθήκες $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AM}+\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{BM}+\mathrm{M\Delta}=\mathrm{B\Delta},$$

οπότε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσες βάσεις στις οποίες αντιστοιχούν ίσα ύψη από την κορυφή Ο, οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{A}(x)=3x^2-3x+4,\ \mathrm{B}(x)=x^2+3,\ \Gamma(x)=2x^2-3x+5, \Delta(x)=2x^2+2,$$

παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω τριώνυμα έχουν αρνητική διακρίνουσα, οπότε έχουν θετική τιμή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι ποσότητες μέσα στα ριζικά των δύο μελών της εξίσωσης έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)=\Gamma(x)+\Delta(x)\Leftrightarrow \mathrm{A}(x)-\Delta(x)=\Gamma(x)-\mathrm{B}(x)=\mathrm{P}(x)=x^2-3x+2.$$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

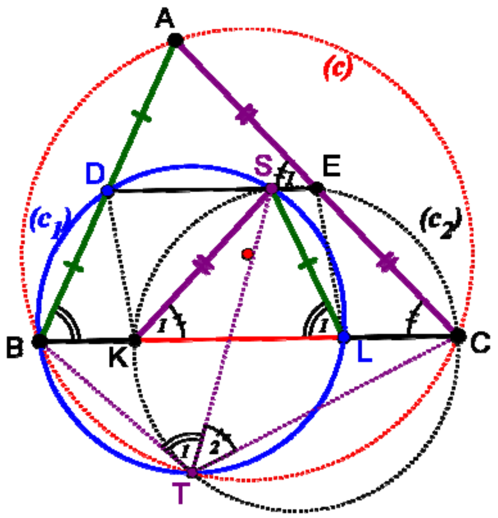
$$\sqrt{\Delta(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\mathrm{B}(x)}=\sqrt{\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\Delta(x)}$$
$$\Leftrightarrow \Delta(x)+\mathrm{P}(x)+\mathrm{B}(x)+2\sqrt{\mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]}=$$
$$(x)+\mathrm{P}(x)+\Delta(x)+2\sqrt{\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]=\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)\left[\mathrm{B}(x)-\Delta(x)\right]=0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=0 \text{ ή } \mathrm{B}(x)-\Delta(x)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ ή } x^2+3-2x^2-2=0 \qquad ,$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2=1 \Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1.$$

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

Λύση
Γράφουμε $\mathrm{x}^3-\mathrm{x}=\mathrm{x}\left(\mathrm{x}^2-1\right)=\left(\mathrm{x}-1\right)\mathrm{x}\left(\mathrm{x}+1\right)$, το οποίο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, επομένως διαιρείται και από το 2 και από το 3. Επομένως ο 6 διαιρεί το $(x-1)x(x+1)$.
Όμοια ο 6 διαιρεί το $(y-1)y(y+1)$, οπότε το αριστερό μέλος διαιρείται από 6. Άρα ο 6 διαιρεί το pq, και αφού p, q πρώτοι αριθμοί, θα πρέπει $pq=6$.
Επομένως η εξίσωση γίνεται $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)=6$. Αν τώρα $x, y \geq 2$, τότε $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1) \geq 6+6=12$, οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2, έστω ο y. Τότε όμως $(y-1)y(y+1)=0$, οπότε $(x-1)x(x+1)=6$ και αφού x μη αρνητικός ακέραιος, πρέπει $x=2$. Επομένως οι λύσεις είναι:
$$(x, y) \in \{(2,0),(2,1),(0,2),(1,2)\}.$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ και έστω D, E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση
Η DE συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα $\mathrm{DE}//=\frac{\mathrm{BC}}{2}$, άρα το τετράπλευρο $DELK$, είναι τραπέζιο. Επομένως, για να είναι το τετράπλευρο $DELK$ παραλληλόγραμμο, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $DE=KL=\frac{BC}{2}$.
Έστω ότι ο κύκλος (c_1), τέμνει το τμήμα DE στο σημείο S. Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο S. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 6

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABTC$, έχουμε: $\hat{A}+\hat{T}_1+\hat{T}_2=180^o$ (1).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $SLTB$, έχουμε: $\hat{T}_1=\hat{L}_1$ (2).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $DSLB$, έχουμε: $\hat{L}_1=\hat{B}$ (3).

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε: $\hat{T}_2=\hat{C}$ και επειδή $\hat{E}_1=\hat{C}$ (από την παραλληλία $DE\,//\,BC$), συμπεραίνουμε ότι $\hat{T}_2=\hat{E}_1$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία $\hat{E}_1$ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική $\hat{T}_2$). Επομένως έχουμε αποδείξει ότι **το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκεται πάνω στην ευθεία DE.**

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τετράπλευρα $DSLB$ και $SECK$ είναι εγγεγραμμένα τραπέζια (άρα ισοσκελή τραπέζια), οπότε θα ισχύουν οι ισότητες τμημάτων

$$SL=DB=\frac{AB}{2},\ \ SK=EC=\frac{AC}{2}\ ,$$

από τις οποίες σε συνδυασμό με τις ισότητες γωνιών $\hat{L}_1=\hat{B}$ και $\hat{K}_1=\hat{C}$, συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ABC και SLK είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

Τελικά προκύπτει ότι: $DE=KL=\frac{BC}{2}$.