Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς $A = \overline{aβγ} = 100\cdot a + 10\cdot β + γ$ οι οποίοι κατά την ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 20 και υπόλοιπο 6

Οι αριθμοί $a, β, γ$ θα είναι κάποιοι ακέραιοι θετικοί από το 0 έως το 9.

Ευκλείδεια διαίρεση

$$100\cdot a + 10\cdot β + γ = 20\cdot(a+β+γ) + 6$$

$$\Rightarrow 100\cdot a + 10β + γ = 20\cdot a + 20β + 20γ + 6$$

$$\Rightarrow 100a - 20a = 20β + \underbrace{20γ - γ} + 6 - 10β$$

$$\Rightarrow 80\cdot a = 10β + \underbrace{10γ + 9γ} + 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{80\cdot a}_{\substack{\text{πολλαπλάσιο} \\ \text{του } 10}} = \underbrace{10\cdot(β+γ)}_{\substack{\text{πολλαπλάσιο} \\ \text{το } 10}} + 9γ + 6$$

Εφ' όσον $80\cdot a$ είναι πολλαπλάσιο του 10, όπως αντίστοιχα και το $10\cdot(2β+γ)$ θα πρέπει και το $9\cdot γ + 6$ να είναι πολλαπλάσιο του 10.

Από την προπαίδεια του 9 αυτό ισχύει μόνο όταν $γ = 6$ όπου $9\cdot 6 + 6 = 60$.

Άρα αφού $γ = 6$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$80\cdot a = 10β + 120 \Rightarrow 8\cdot a = β + 12$$

Με τον περιορισμό ότι $a, β, γ \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ προκύπτει ότι

$a = 2$ και $β = 4$. Άρα έχω τον τριψήφιο $\overline{aβγ} = 246$.

με άθροισμα ψηφίων $2+4+6 = 12$ και $246 : 12 = 20\cdot 12 + 6$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός $A = \dfrac{\nu^2+9\nu+20}{\nu^2+3\nu-4}$ είναι ακέραιος.

$$A = \frac{\nu^2+9\nu+20}{\nu^2+3\nu-4} \underset{(*)}{=} \frac{(\nu+5)\cdot\cancel{(\nu+4)}}{\cancel{(\nu+4)}\cdot(\nu-1)} \underset{(*)}{=} \frac{\nu+5}{\nu-1} = \frac{\nu-1+6}{\nu-1} = \frac{\nu-1}{\nu-1} + \frac{6}{\nu-1}$$
$$= 1 + \frac{6}{\nu-1} \quad (*)$$

(*)

- για το $\nu^2+9\nu+20$ εφαρμόζω παραγοντοποίηση με τριώνυμο αναζητώ δηλαδή δύο αριθμούς με άθροισμα $+9$ και γινόμενο $+20$ αυτοί είναι $+5+4=+9$ και $(+5)\cdot(+4)=+20$

- για το $\nu^2+3\nu-4$ εφαρμόζω παραγοντοποίηση με τριώνυμο αναζητώ δηλαδή δυο αριθμούς με άθροισμα $+3$ και γινόμενο -1 αυτοί είναι $+4+(-1)=+3$ και $(+4)\cdot(-1)=-4$

*) Θα πρέπει $(\nu+4)\cdot(\nu-1)\neq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\nu\neq -4\\ \text{και } \nu\neq 1\end{array}\right\}$ εξαιρώ συνεπώς αυτές τις δύο τιμές του ν, οι οποίες μηδενίζουν τον παρονομαστή του κλάσματος.

(*) Συνεπώς αρκεί να βρω τους ακεραίους αριθμούς ν για τους οποίους το κλάσμα $\dfrac{6}{\nu-1}$ είναι ακέραιος. (εξαιρούνται οι $\nu=1$ και $\nu=-4$)

Με δοκιμές έχω: (Άρα $\underline{\nu = -5,-2,-1,0,2,3,4,7}$)

- $\nu=0$ τότε $\dfrac{6}{\nu-1}=-6$ άρα $A=1+(-6)=-5$ ακέραιος
- $\nu=2$ τότε $\dfrac{6}{\nu-1}=+6$ άρα $A=1+6=7$ ακέραιος
- $\nu=3$ τότε $\dfrac{6}{\nu-1}=+3$ άρα $A=1+3=4$ ακέραιος
- $\nu=4$ τότε $\dfrac{6}{\nu-1}=+2$ άρα $A=1+2=3$ ακέραιος
- $\nu=7$ τότε $\dfrac{6}{\nu-1}=+1$ άρα $A=1+1=2$ ακέραιος

και ομοίως για τις τιμές $\nu=-1,-2,-5$.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι εξισώσεις $5\cdot(7x-2a)=6\cdot\left(5x+\frac{b}{6}\right)$

και $3\cdot(8y-6a)=7\cdot\left(3y+\frac{b}{7}\right)$

με άγνωστο το x και το y αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί a, b με b>0 είναι ακέραιοι που θεωρούνται γνωστοί. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του ακεραίου b για την οποία και οι δύο δεδομένες εξισώσεις έχουν ακέραια λύση.

$$\left.\begin{aligned}5\cdot(7x-2a)&=6\cdot\left(5x+\frac{b}{6}\right)\\ \text{και}\quad 3\cdot(8y-6a)&=7\cdot\left(3y+\frac{b}{7}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}35x-10a&=30x+b\\ 24y-18a&=21y+b\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}35x-30x&=10a+b\\ 24y-21y&=18a+b\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}5x&=10a+b\\ 3y&=18a+b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x&=\frac{10a+b}{5}\\ y&=\frac{18a+b}{3}\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}x&=2a+\frac{b}{5}\\ y&=6a+\frac{b}{3}\end{aligned}\right\}$$

a και b είναι ακέραιοι.

Συνεπώς για να είναι x και y ακέραιοι θα πρέπει $\frac{b}{5}$ και $\frac{b}{3}$ να είναι ακέραιοι, δηλαδή ο b να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο και του 3 και του 5.

κι επειδή αναζητώ την ελάχιστη τιμή του b,

τότε αναζητώ το ΕΚΠ(3,5) = 15.

και για αυτή την τιμή, οι λύσεις των εξισώσεων θα είναι

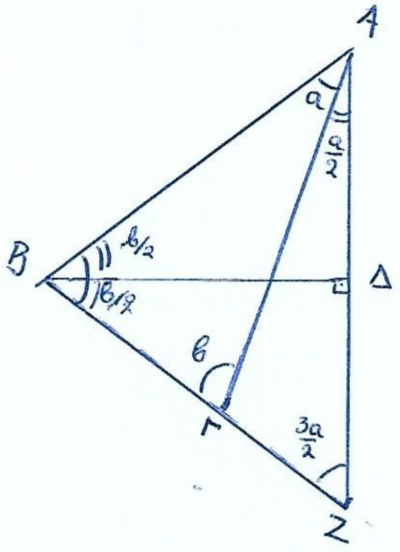
$$\left.\begin{aligned}x&=2a+3\\ \text{και}\quad y&=6a+5\end{aligned}\right\}$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Z στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot \Gamma\hat{A}Z$ και η ευθεία AZ να είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

(a) Να αποδείξετε ότι $AB = BZ$

(b) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.



(a) Σχηματίζονται τα ορθογώνια τρίγωνα $B\overset{\triangle}{\Delta}A$ και $B\overset{\triangle}{\Delta}Z$ με την ορθή γωνία στο Δ.

Εφαρμόζω τον τύπο του ημιτόνου για τη γωνία Α. στο ορθογώνιο $B\overset{\triangle}{\Delta}A$

$$\eta\mu\hat{A} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{B\Delta}{AB}$$

$$\Rightarrow \eta\mu\hat{A} = \frac{B\Delta}{AB}.$$

Εφαρμόζω τον τύπο του ημιτόνου και για τη γωνία Z στο ορθογώνιο $B\overset{\triangle}{\Delta}Z$

$$\eta\mu\hat{Z} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{B\Delta}{BZ}$$

Στο ορθογώνιο $B\overset{\triangle}{\Delta}A$ οι $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι συμπληρωματικές δηλαδή $\hat{A} + \frac{b}{2} = 90^\circ$

Στο ορθογώνιο $B\overset{\triangle}{\Delta}Z$ οι $\hat{Z}$ και $\hat{B}$ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\hat{Z} + \frac{b}{2} = 90$

Συνεπώς $\hat{A} = \hat{Z}$. Οπότε και $\eta\mu\hat{A} = \eta\mu\hat{Z} \Rightarrow \frac{B\Delta}{AB} = \frac{B\Delta}{BZ} \Rightarrow AB = BZ$.

(b) Άθροισμα γωνιών στο $B\overset{\triangle}{\Delta}A$ θα είναι $\left(a + \frac{a}{2}\right) + \frac{b}{2} = 90^\circ \Rightarrow \frac{3a}{2} + \frac{b}{2} = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow 3a + b = 180^\circ$

Άθροισμα γωνιών στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $a + 2b = 180^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} 3a + b = 180^\circ \\ a + 2b = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a + 2b = 360^\circ \\ a + 2b = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5a = 180^\circ \\ 3a + b = 180^\circ \end{array}\right\}$$