

Παράγραφος Α3.1-3.2

1. Τι ονομάζουμε συνάρτηση;

Απάντηση

Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση).

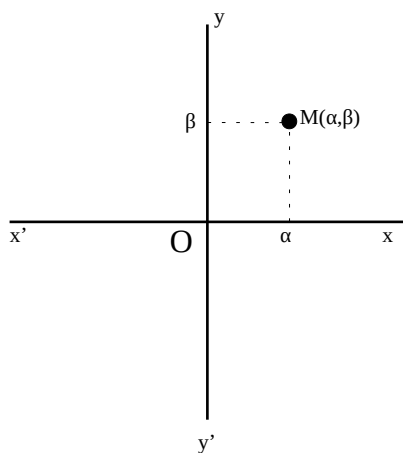
Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

2. Τι ονομάζεται ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Σύστημα ορθογωνίων αξόνων) και τι συντεταγμένες (τετμημένη, τεταγμένη) σημείου;

Απάντηση

Ονομάζεται ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (Σύστημα ορθογωνίων αξόνων) ένα σύστημα από δύο κάθετους άξονες με κοινή αρχή στους οποίους οι μονάδες έχουν το ίδιο μήκος.

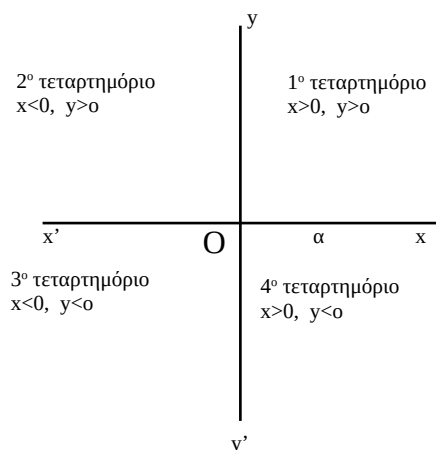
Ονομάζονται συντεταγμένες (τετμημένη, τεταγμένη) σημείου ένα μοναδικό για κάθε σημείο ζευγάρι αριθμών (α, β) που αντιστοιχίζεται στο σημείο και μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την θέση του στο επίπεδο που είναι εφοδιασμένο με ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Το α ονομάζεται τετμημένη και το β τεταγμένη του σημείου.



3. Τι ονομάζουμε τεταρτημόρια;

Απάντηση:

Τεταρτημόρια ονομάζουμε τις 4 ορθές γωνίες που ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο.



Παρατήρηση: Στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο οι αριθμοί είναι ομόσημοι (έχουν ίδιο πρόσημο) ενώ στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο οι αριθμοί είναι ετερόσημοι (έχουν διαφορετικό πρόσημο)

4. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Απάντηση

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x . Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) .

Παράδειγμα

Έχουμε την συνάρτηση $y = x^2 + 2x + 1$. Για να κάνουμε την γραφική της παράσταση κάνουμε ένα πίνακα τιμών ώστε να βρούμε κάποια σημεία να βάλουμε στο σύστημα αξόνων.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9	16

Για $x = -3$, το $y = (-3)^2 + 2(-3) + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$

Για $x = -2$, το $y = (-2)^2 + 2(-2) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

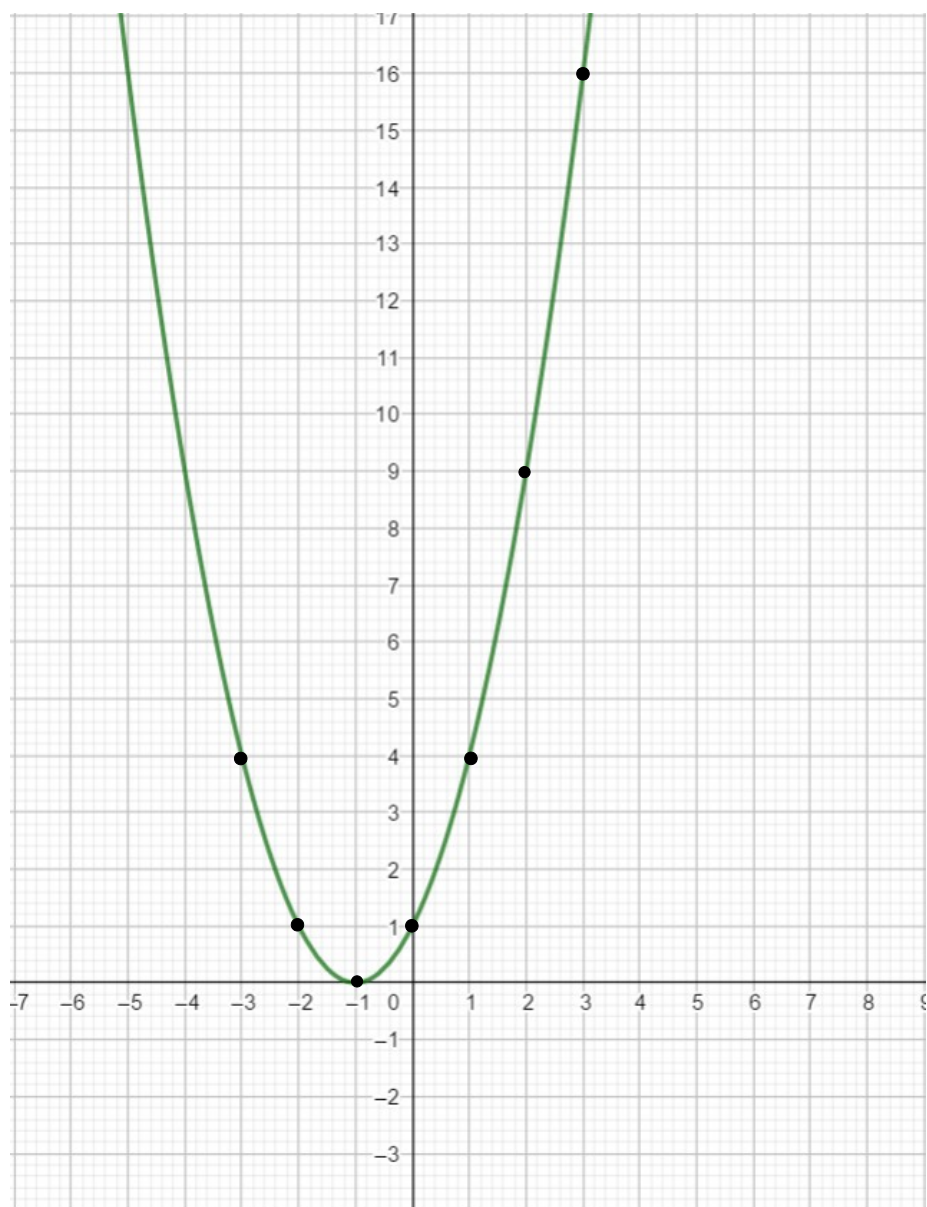
Για $x = -1$, το $y = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

Για $x = 0$, το $y = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$

Για $x = 1$, το $y = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

Για $x = 2$, το $y = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$

Για $x = 3$, το $y = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$



5. Τι ονομάζουμε σημεία τομής της συνάρτησης με του άξονες

Απάντηση

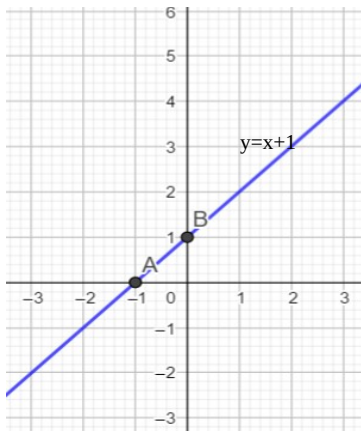
Σημεία τομής με τους άξονες ονομάζουμε τα σημεία που η συνάρτηση τέμνει τους άξονες.

Υπάρχουν δύο σημεία τομής με τους άξονες. Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ ($x,0$) και το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ ($0,y$). Τα σημεία τομής με τους άξονες μπορούμε να τα βρούμε είτε αλγεβρικά είτε γραφικά.

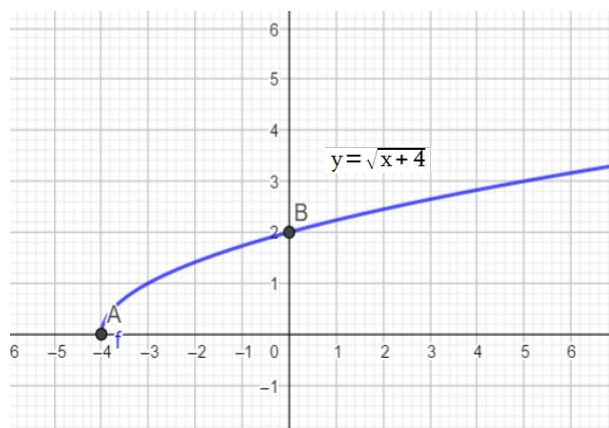
Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y=0$ ενώ για να βρούμε το σημείο τομής με τον $y'y$ θέτουμε $x=0$.

Παράδειγμα:

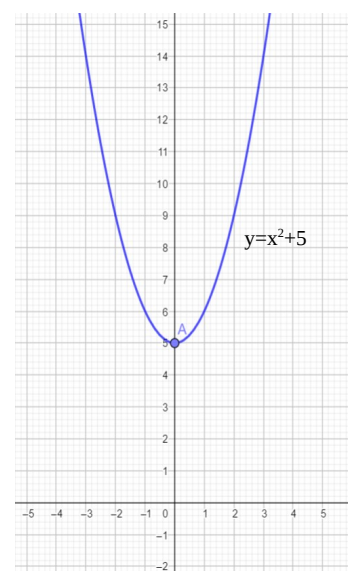
A] Γεωμετρική Εύρεση



Σχήμα α



Σχήμα β



Σχήμα γ

Στο σχήμα α το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι το $A(-1,0)$ ενώ με τον $y'y$ το $B(0,1)$

Στο σχήμα β το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι το $A(-4,0)$ ενώ με τον $y'y$ το $B(0,2)$

Στο σχήμα γ το σημείο τομής με τον $y'y$ το $B(0,5)$ ενώ τον $x'x$ δεν τον τέμνει πουθενά

B] Αλγεβρική Εύρεση

Δίνεται η $y=2x+1$

Σημείο τομής με την $x'x$: Για $y=0$,

$$0=2x+1$$

$$2x+1=0$$

$$2x=-1 \quad . \text{Οπότε το σημείο τομής με τον } x'x \text{ είναι το } A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

Σημείο τομής με την $y'y$: Για $x=0$,

$$y=2 \cdot 0 + 1 \quad \text{Οπότε το σημείο τομής με τον } y'y \text{ είναι το } B(0,1)$$

$$y=1$$

6. Πότε λέμε ότι ένα σημείο $M(a,b)$ ανήκει στην συνάρτηση;

Απάντηση

Ένα σημείο $M(a,b)$ ανήκει σε μία συνάρτηση όταν επαληθεύει την εξίσωση της.

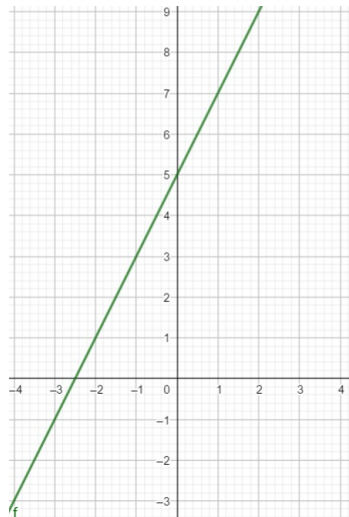
Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $y=2x+5$.

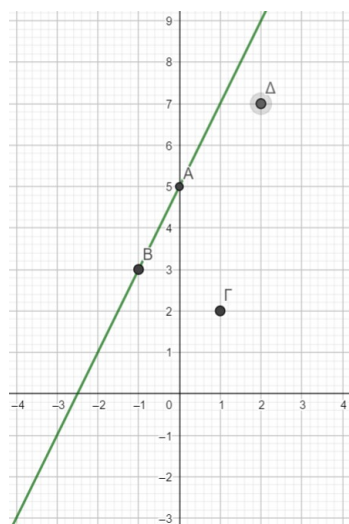
α) Να βρείτε από την γραφική της παράσταση δύο σημεία A και B που ανήκουν σε στην συνάρτηση και δύο σημεία Γ και Δ που δεν ανήκουν.

β) Να εξετάσετε αλγεβρικά ποια από τα σημεία $M(3,5)$ και $N(4,13)$ ανήκουν στην συνάρτηση.

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



α) Από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι στην εξίσωση ανήκουν τα σημεία Α(0,5) και Β(-1,3) ενώ δεν ανήκουν τα σημεία Γ(1,2) και Δ(2,7)



β) Για να δούμε αν ανήκει το Μ(3,5) στην συνάρτηση θα αντικαταστήσουμε όπου $x=3$ και $y=5$ και θα εξετάσουμε αν αληθεύει η ισότητα που προκύπτει.

$$y = 2x + 5$$

$$5 = 2 \cdot 3 + 5$$

$$5 = 6 + 5$$

$$5 = 11, \text{ αδύνατο.}$$

Άρα το Μ(3,5) δεν ανήκει στην συνάρτηση

Κατά τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε και για το Ν(4,13)

$$y = 2x + 5$$

$$13 = 2 \cdot 4 + 5$$

$$13 = 8 + 5$$

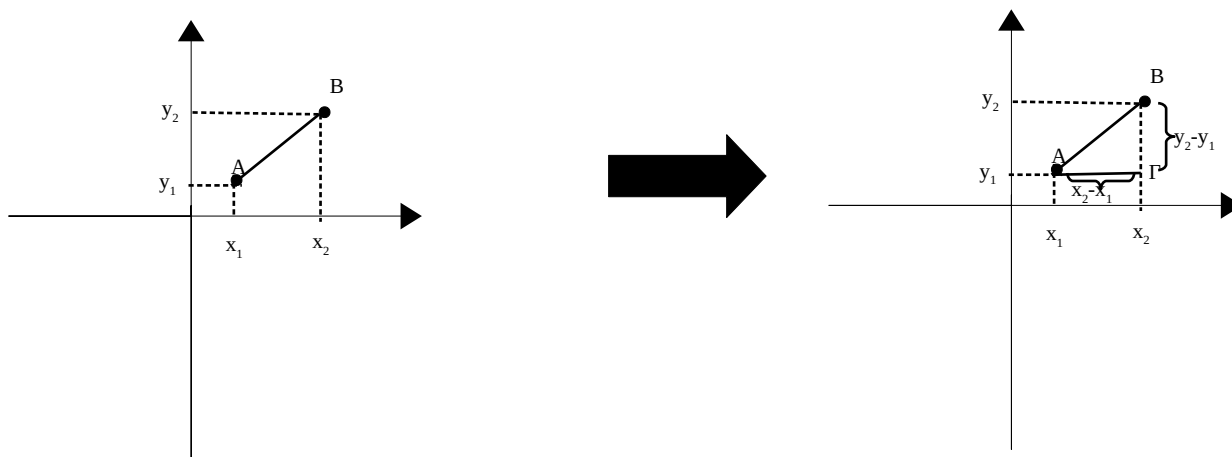
$$13 = 13, \text{ που ισχύει.}$$

Άρα το Ν(4,13) ανήκει στην συνάρτηση

7. Πως βρίσκουμε την απόσταση δύο σημείων Α και Β

Απάντηση

Έστω ότι έχουμε το σημείο $A(x_1, y_1)$ και το $B(x_2, y_2)$ και εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση του Α από το Β. Αρχικά τοποθετούμε τα σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Τότε καταλαβαίνουμε ότι η απόσταση του σημείου Α από το Β είναι απλά το μήκος ΑΒ



Παρατηρήστε ότι αν φέρουμε μία οριζόντια ευθεία στο ύψος του Α τότε δημιουργείται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ως υποτείνουσα την ΑΒ.

Το μήκος ΑΓ είναι $x_2 - x_1$ ενώ το μήκος ΒΓ είναι $y_2 - y_1$, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων

$A(2,2)$ και $B(6,5)$

$\Gamma(-1,3)$ και $\Delta(2,-4)$

$E(-2,-1)$ και $Z(-3,-2)$

$$AB^2 = (6 - 2)^2 + (5 - 2)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$AB = \sqrt{25} = 5$$

$$\Gamma\Delta^2 = (2 - (-1))^2 + (-4 - 3)^2 = (2 + 1)^2 + (-7)^2 = 3^2 + (-7)^2 = 9 + 49 = 58$$

$$\Gamma\Delta = \sqrt{58}$$

$$EZ^2 = (-3 - (-2))^2 + (-2 - (-1))^2 = (-3 + 2)^2 + (-2 + 1)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$$

$$EZ = \sqrt{2}$$

Παράγραφος Α3.3

1. Πότε δύο ποσά λέγονται ανάλογα;

Απάντηση

Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Δύο ποσά x και y είναι **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο πηλίκο: $\frac{y}{x}=a$. Το πηλίκο a λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε ποια ποσά είναι ανάλογα.

Πίνακας 1

x	3	9	15	18
y	2	6	10	12

Πίνακας 2

x	20	200	100	80
y	4	40	20	12

Για τον πίνακα 1

Υπολογίζουμε τα πηλίκα $\frac{y}{x}$ για κάθε στήλη του πίνακα

$$1^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

$$3^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$$

$$4^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

Άρα τα ποσά του πίνακα 1 είναι ανάλογα καθώς κάθε στήλη δίνει το ίδιο πηλίκο $\frac{y}{x} = 2$

Για τον πίνακα 1

Υπολογίζουμε τα πηλίκα $\frac{y}{x}$ για κάθε στήλη του πίνακα

$$1^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{4}{20} = \frac{4:4}{20:4} = \frac{1}{5}$$

$$2^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{40}{200} = \frac{40:40}{200:40} = \frac{1}{5}$$

$$3^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{20}{100} = \frac{20:20}{100:20} = \frac{1}{5}$$

$$4^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{12}{80} = \frac{12:4}{80:4} = \frac{3}{20}$$

Άρα τα ποσά του πίνακα 2 δεν είναι ανάλογα καθώς η 4^η στήλη δίνει πηλίκο $\frac{y}{x} = \frac{3}{20} \neq \frac{1}{5}$

Παράδειγμα 2

Να συμπληρώσετε τα κενά αν γνωρίζετε ότι τα ποσά είναι ανάλογα.

x	3	12		30
y	5		25	

Από κάποια στήλη που έχει συμπληρωμένα και τις δύο συντεταγμένες υπολογίζουμε το πηλίκο $\frac{y}{x}$. Για το παράδειγμα η στήλη αυτή είναι η 1^η.

$$1^{\text{η}} \text{ στήλη: } \frac{y}{x} = \frac{5}{3}$$

Από την θεωρία ξέρουμε ότι και οι υπόλοιπες στήλες πρέπει να δίνουν πηλίκο $\frac{5}{3}$

2 ^η στήλη:	3 ^η στήλη:	4 ^η στήλη:
$\frac{x}{12} = \frac{5}{3}$	$\frac{25}{x} = \frac{5}{3}$	$\frac{x}{30} = \frac{5}{3}$
$3x = 12 \cdot 5$	$5x = 25 \cdot 3$	$3x = 30 \cdot 5$
$3x = 60$	$5x = 75$	$3x = 150$
$x = \frac{60}{3}$	$x = \frac{75}{5}$	$x = \frac{150}{3}$
$x = 20$	$x = 15$	$x = 30$

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

x	3	12	15	30
y	5	20	25	50

2. Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ και από που διέρχεται;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.

Όταν αναφερόμαστε στην ευθεία, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$, τότε λέμε: η ευθεία με εξίσωση $y = ax$ ή απλώς η ευθεία $y = ax$.

3. Ποια είναι η εξίσωση του άξονα $x'x$;

Απάντηση

Ο άξονας $x'x$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 0x$, δηλαδή $y = 0$.

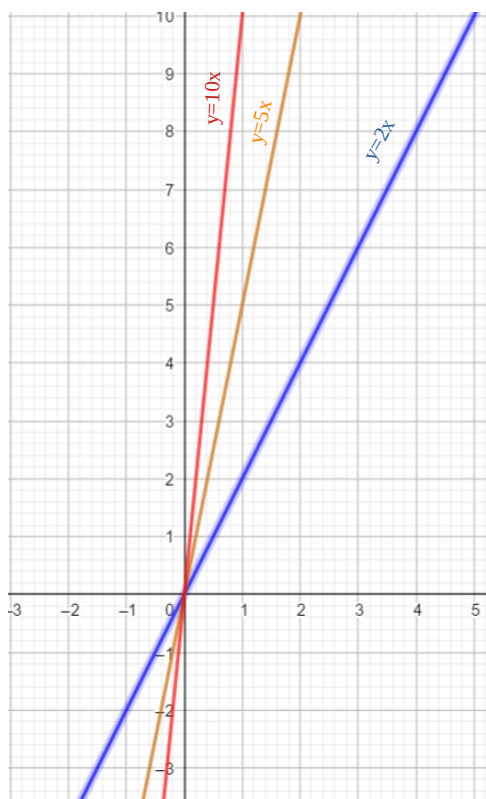
4. Τι ονομάζεται κλίση της ευθείας $y = ax$;

Απάντηση

Κλίση της ευθείας $y = ax$ ονομάζεται η παράμετρος a που εκφράζει το σταθερό πηλίκο

$$\frac{y}{x} = a, \quad x \neq 0.$$

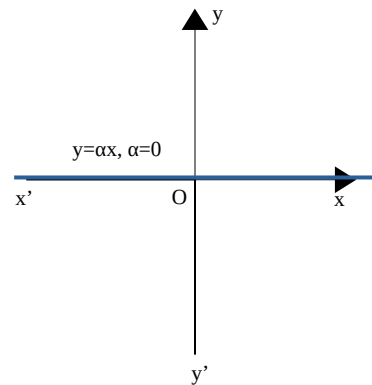
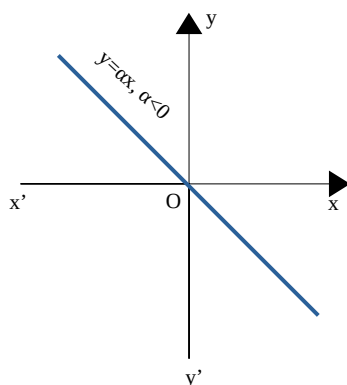
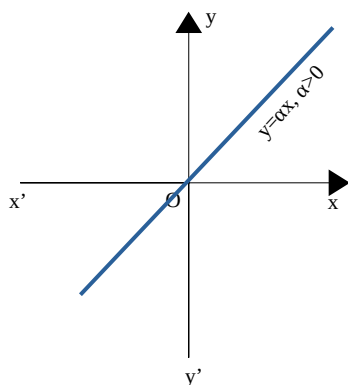
Παρατήρηση: Η κλίση a της $y = ax$ εκφράζει πόσο “απότομη” είναι η ευθεία. Όσο πιο απότομη είναι η ευθεία τόσο μεγαλύτερη κλίση έχει.



Στην εικόνα βλέπουμε τις συναρτήσεις
 $y = 2x$ (μπλε) με κλίση $a = 2$
 $y = 5x$ (πορτοκαλί) με κλίση $a = 5$
 $y = 10x$ (κόκκινο) με κλίση $a = 10$
Βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται η κλίση η ευθεία γίνεται πιο απότομη, δηλαδή αυξάνεται πολύ πιο γρήγορα το y καθώς αυξάνεται το x .

5. Να προσδιορίσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ για $a > 0$, $a < 0$ και $a = 0$.

Απάντηση



Παρατήρηση: α) Η $y=ax$ με $a>0$ βρίσκεται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο και “ανεβαίνει”, δηλαδή καθώς αυξάνεται το x αυξάνεται και το y .

β) Η $y=ax$ με $a<0$ βρίσκεται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο και “κατεβαίνει”, δηλαδή καθώς αυξάνεται το x μειώνεται το y .

γ) Η $y=ax$ με $a=0$ είναι ο άξονας $x'x$. Τότε η συνάρτηση ούτε ανεβαίνει ούτε κατεβαίνει.

6. Τι μορφή έχουν τα σημεία της συνάρτησης $y=ax$;

Απάντηση

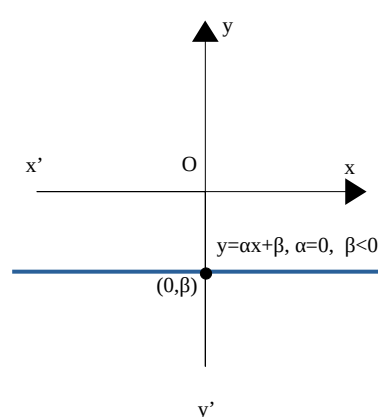
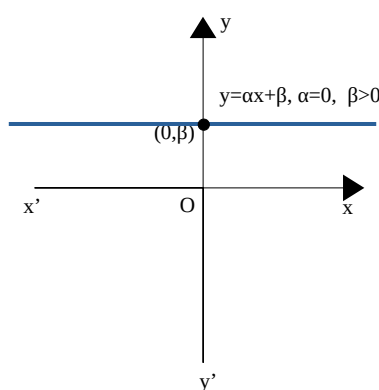
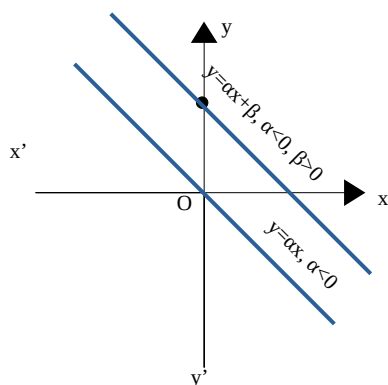
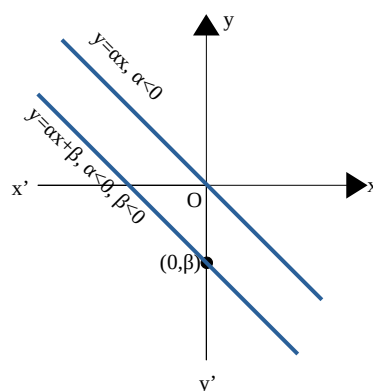
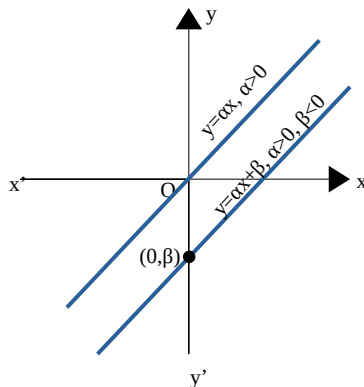
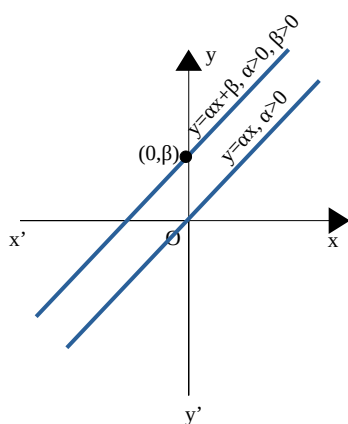
Τα σημεία της συνάρτησης $y=ax$ έχουν μορφή $M(x, ax)$

Παράγραφος Α3.4

1. Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+\beta$ και από που διέρχεται ;

Απάντηση

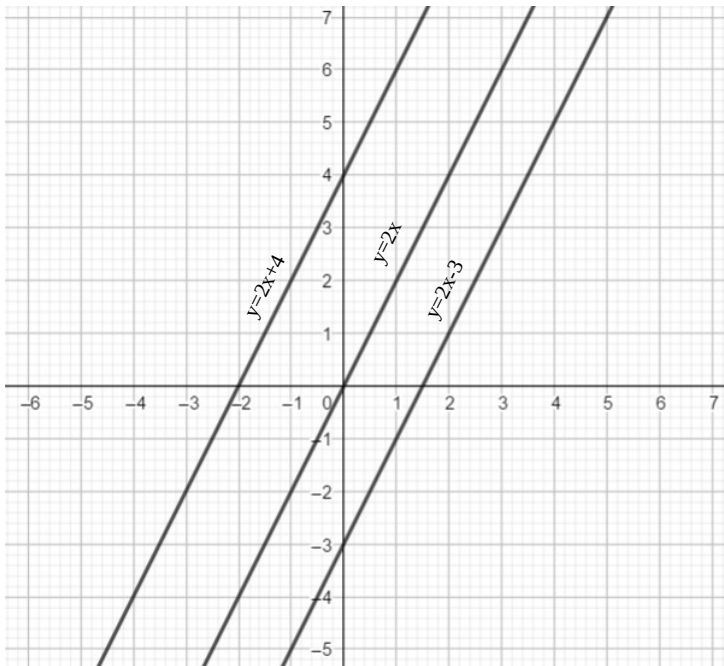
Η γραφική παράσταση της $y = ax + \beta$, $\beta \neq 0$ είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = ax$, που διέρχεται από το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα $y'y$.



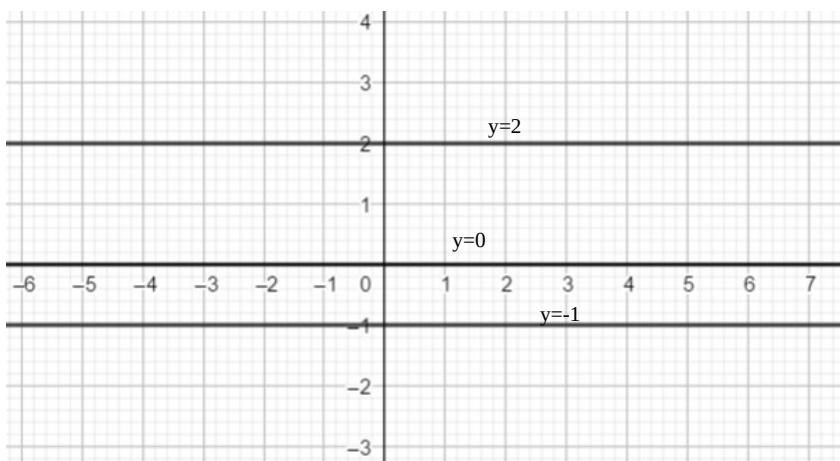
Παρατήρηση: α) Η παράμετρος α της συνάρτησης $y=ax+\beta$ είναι η κλίση της ευθείας ενώ η παράμετρος β ονομάζεται κατακόρυφη μετατόπιση και εκφράζει πόσο έχουμε μετακινήσει στον άξονα $y'y$ την ευθεία $y=ax$.

β) Οι ευθείες που είναι παράλληλες έχουν την ίδια κλίση δηλαδή ίδια παράμετρο α .

Παραδείγματα



Έχουμε τις ευθείες
 $y=2x$ με $\alpha=2$ και $\beta=0$
 $y=2x+4$ με $\alpha=2$ και $\beta=4$
 $y=2x-3$ με $\alpha=2$ και $\beta=-3$
Και οι 3 ευθείες έχουν ίδια κλίση $\alpha=2$ για αυτό βλέπουμε και στο σχήμα ότι είναι παράλληλες. Βλέπουμε ότι η $y=2x+4$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της $y=2x$ κατά 4 μονάδες προς τα πάνω ενώ η $y=2x-3$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της $y=2x$ κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



Έχουμε τις ευθείες
 $y=2$ με $\alpha=0$ και $\beta=2$
 $y=0$ με $\alpha=0$ και $\beta=0$
 $y=-1$ με $\alpha=0$ και $\beta=-1$
Και οι 3 ευθείες έχουν ίδια κλίση $\alpha=0$ για αυτό βλέπουμε και στο σχήμα ότι είναι παράλληλες και οριζόντιες. Βλέπουμε ότι η $y=2$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της $y=0$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω ενώ η $y=-1$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της $y=0$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

περιγράφει τον άξονα $y'y$;

Απάντηση

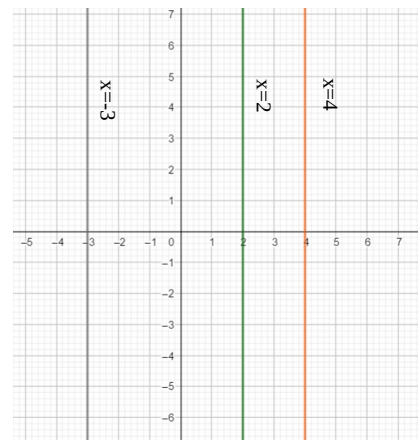
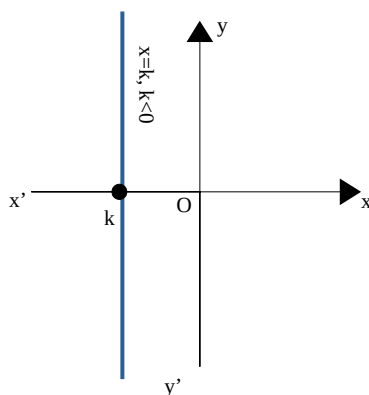
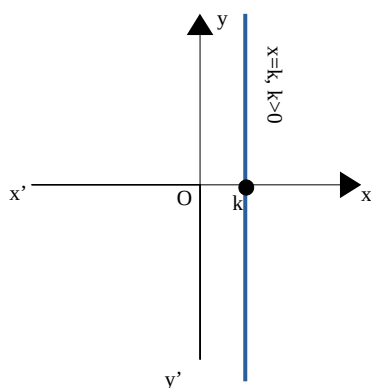
Επειδή όταν βρισκόμαστε στον άξονα $y'y$ δεν κινούμαστε καθόλου οριζοντίως η εξίσωση του άξονα $y'y$ είναι $x=0$.

3. Ποια είναι η γραφική παράσταση της ευθείας $x=k$, $k \neq 0$;

2. Ποια είναι η εξίσωση που

Απάντηση

Η ευθεία $x=k, k \neq 0$ παριστάνει μία κατακόρυφη ευθεία παράλληλη στον $y'y$



Παράγραφος Α3.5

1. Ποια ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα

Απάντηση

Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό. Δηλαδή $x \cdot y = \alpha, \alpha \neq 0$.

Αν $\alpha \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των x και y , τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$.

Παράδειγμα

Να βρείτε ποια ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Πίνακας 1

x	3	12	$\frac{1}{3}$	24
y	2	$\frac{1}{2}$	18	$\frac{1}{4}$

Για να είναι δύο ποσά αντιστρόφως ανάλογα πρέπει το γινόμενο $y \cdot x = \alpha, \alpha \neq 0$ να είναι σταθερό.

1^η στήλη: $y \cdot x = 2 \cdot 3 = 6$

2^η στήλη: $y \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$

3^η στήλη: $y \cdot x = \frac{18 \cdot 1}{3} = 6$

4^η στήλη: $y \cdot x = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$

Αφού κάθε στήλη έχει γινόμενο 6 έπεται ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα

Πίνακας 2

x	20	12	9	10
y	4	5	8	8

Για να είναι δύο ποσά αντιστρόφως ανάλογα πρέπει το γινόμενο $y \cdot x = \alpha, \alpha \neq 0$ να είναι σταθερό.

1^η στήλη: $y \cdot x = 4 \cdot 20 = 80$

2^η στήλη: $y \cdot x = 5 \cdot 12 = 60$

3^η στήλη: $y \cdot x = 8 \cdot 9 = 72$

4^η στήλη: $y \cdot x = 8 \cdot 10 = 80$

Επειδή η 3^η στήλη έχει γινόμενο 72 και όχι 80 έπεται ότι τα ποσά δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα .

2. Πως λέγεται η γραφική της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$;

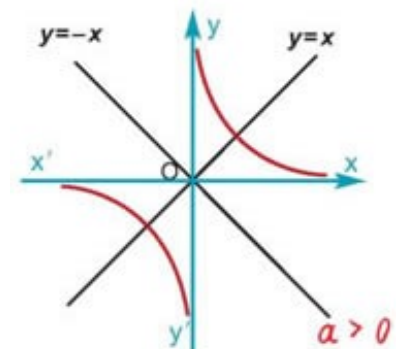
Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, όπου $\alpha \neq 0$, λέγεται

υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται:

Στο 1^ο και στο 3^ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha > 0$.

Στο 2^ο και στο 4^ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha < 0$.



3. Ποιες είναι οι ιδιότητες της υπερβολής;

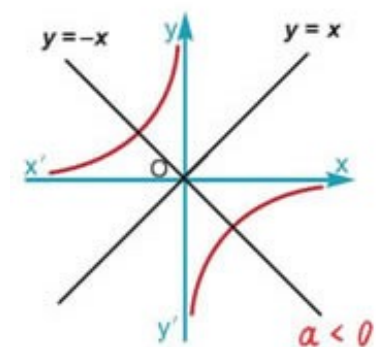
Απάντηση

Η υπερβολή:

α) Δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Οx και Οy, διότι οι συντεταγμένες των σημείων της δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0.

β) Έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

γ) Έχει άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$.



4. Τι εκφράζει γραφικά η παράμετρος α στην υπερβολή.

Απάντηση

Η παράμετρος α στην υπερβολή μας δείχνει πόσο απότομη ή ομαλή είναι. Όσο μεγαλύτερο γίνεται το α κατά απόλυτη τιμή τόσο περισσότερο ομαλή γίνεται η υπερβολή και απομακρύνεται από τους

άξονες ενώ όσο μικρότερο γίνεται το a κατά απόλυτη τιμή τόσο περισσότερο απότομη γίνεται η υπερβολή και προσεγγίζει τους άξονες.

