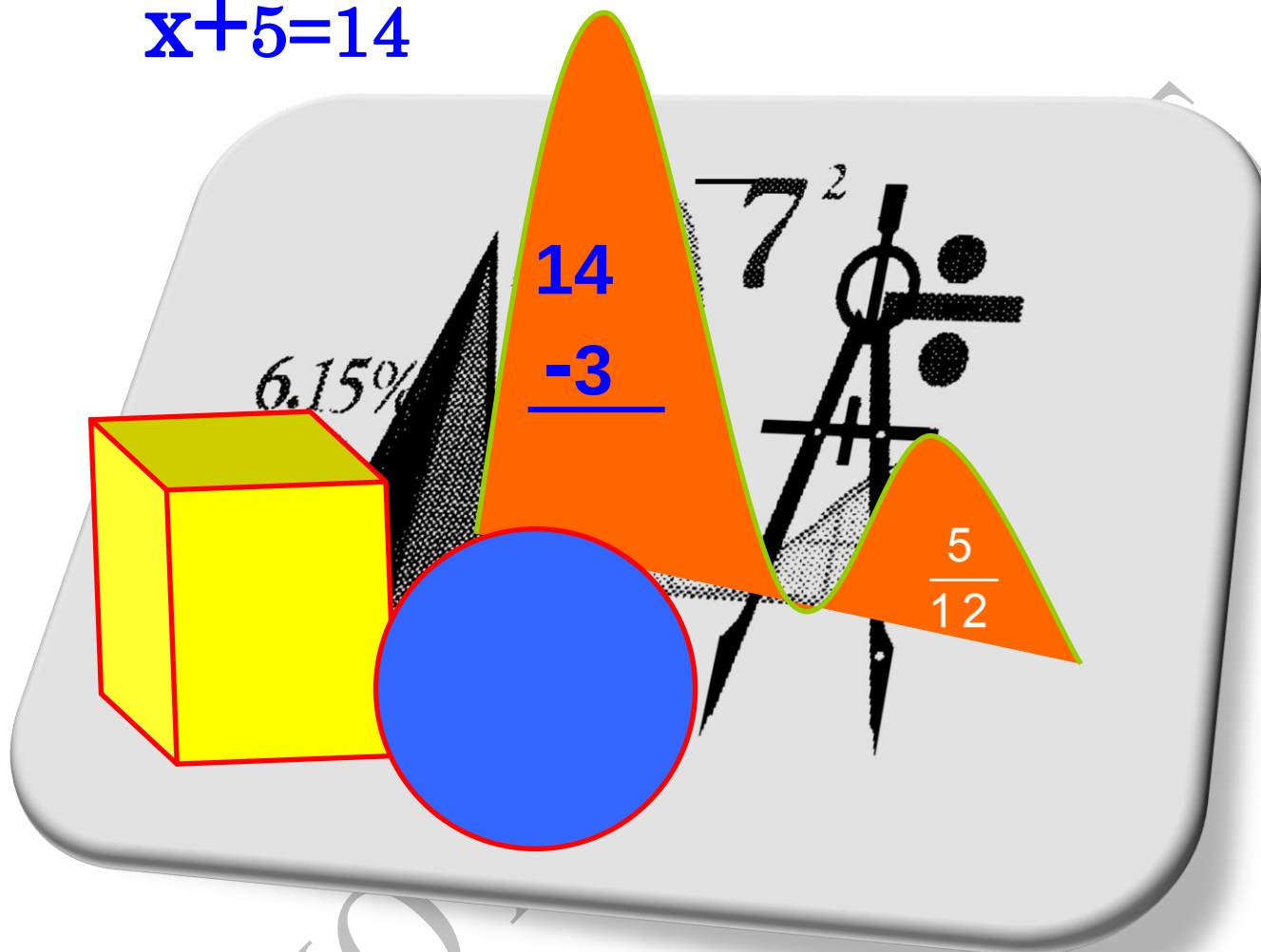


$$x+5=14$$



ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2024-2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 1^ο

1.1 Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη – Στρογγυλοποίηση

Ποιοι αριθμοί λέγονται φυσικοί :

Φυσικοί λέγονται οι αριθμοί 0,1,2,3,4,.....60,61,.....

Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται :

Διακρίνονται σε δυο κατηγορίες :

A) Άρτιοι

B) Περιττοί

Άρτιοι : 0 ,2,4,6,8,10,.....

Περιττοί : 1,3,5,7,9,.....

Εργασία

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιοι και ποιοί περιττοί;

24 , 15 , 38 , 202 , 13 , 71 , 44 , 97 , 101

Άρτιοι :

Περιττοί :

Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

Στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης για να γράψουμε οποιοδήποτε φυσικό αριθμό χρησιμοποιούμε τα εξής δέκα ψηφία : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Η αξία ενός ψηφίου σε απλές μονάδες καθορίζεται από τη θέση που κατέχει.

Ο κανόνας του δεκαδικού συστήματος είναι:

➤ Δέκα μονάδες μιας τάξης σχηματίζουν 1 μονάδα της αμέσως ανώτερης τάξης
Σ'ένα φυσικό αριθμό από δεξιά :

➤ Το 1^ο ψηφίο παριστάνει τις απλές μονάδες

➤ Το 2^ο ψηφίο παριστάνει τις δεκάδες

➤ Το 3^ο ψηφίο παριστάνει τις εκατοντάδες

➤ Το 4^ο ψηφίο παριστάνει τις χιλιάδες κ.λ.π

Εργασία

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας σύμφωνα με το παράδειγμα της πρώτης γραμμής

Αριθμός	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
2068	2	0	6	8
125				
1250				
47				
5680				

Αναπτυγμένη μορφή αριθμού

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ο αριθμός 2068 που είναι γραμμένος στην κανονική μορφή , γράφεται στην αναπτυγμένη ως εξής :

$$2068 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

Εργασία

Να γραφούν οι παρακάτω αριθμοί σε αναπτυγμένη μορφή :

$$5.486 = \text{-----}$$

$$1.237 = \text{-----}$$

$$78 = \text{-----}$$

$$12.870 = \text{-----}$$

Σύγκριση αριθμών

Σύγκριση δυο αριθμών σημαίνει να βρούμε αν αυτοί είναι ίσοι ή στην περίπτωση που δεν είναι ίσοι ποιος από τους δυο είναι ο μεγαλύτερος. Άρα έχουμε την δυνατότητα να διατάξουμε τους φυσικούς αριθμούς από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο δηλαδή με αύξουσα σειρά π.χ

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots < 10 < 11 < \dots$$

Διάταξη

Λόγω αυτής της δυνατότητας που έχουμε για τη διάταξη των φυσικών μπορούμε να τους τοποθετήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με τον εξής τρόπο :

Σε μια ευθεία παίρνουμε ένα σημείο Ο που το λέμε αρχή και παριστάνει τον αριθμό 0. Δεξιά από το Ο παίρνουμε ένα σημείο Α που παριστάνει τον αριθμό 1. Με μονάδα μέτρησης το ΟΑ βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς 2, 3, 4,

Στρογγυλοποίηση

Στρογγυλοποίηση ονομάζουμε την διαδικασία κατά την οποία αντικαθιστούμε ένα φυσικό αριθμό με κάποιο λίγο μεγαλύτερο του ή λίγο μικρότερο του.

Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα φυσικό αριθμό κάνουμε τα εξής βήματα :

- Προσδιορίζουμε την τάξη ως προς την οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
- Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης :
 - 1) Αν είναι μικρότερο του 5 (δηλ. 0,1,2,3,4) το ψηφίο αυτό και τα επόμενα του τα αντικαθιστούμε με το μηδέν
 - 2) Αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5 (δηλ. 5,6,7,8,9) το ψηφίο αυτό και τα επόμενα μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.
 - 3) Αν το ψηφίο της τάξης ως προς την οποία στρογγυλοποιούμε είναι το 9 και δεξιά του έχουμε 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9 τότε :
 - Αυξάνουμε κατά 1 τον αριθμό που βρίσκεται αριστερά του 9

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

και

➤ Αντικαθιστούμε το 9 και τα δεξιά ψηφία του με μηδενικά.

Παράδειγμα

1) Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός : α) 144 στις δεκάδες , β) 1957 στις εκατοντάδες.

Λύση

α) Το ψηφίο των δεκάδων είναι το 4 το επόμενο ψηφίο του είναι το 4 < 5 άρα το 4 γίνεται μηδέν και ο αριθμός στρογγυλοποιείται σε 140.

β) Το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 9 το επόμενο ψηφίο του είναι το 5 άρα το 9 το 5 και το 7 γίνονται μηδέν ενώ το 1 αυξάνεται κατά 1 και γίνεται 2 δηλαδή ο αριθμός στρογγυλοποιείται σε 2000.

Εργασία

Να στρογγυλοποιηθούν οι παρακάτω αριθμοί :

A) Ο αριθμός 14593 στις εκατοντάδες

.....
.....
.....

B) Ο αριθμός 15784 στις δεκάδες

.....
.....
.....

Ασκήσεις

1. Γράψτε τους άρτιους και τους περιττούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 620 και 633.

2. Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά : (Αναπτυγμένη μορφή)

$$\alpha) 5 \cdot \underline{\quad} + 6 \cdot \underline{\quad} + 2 \cdot \underline{\quad} + 3 \cdot \underline{\quad} = 5623, \beta) 4 \cdot \underline{\quad} + 0 \cdot \underline{\quad} + 3 \cdot \underline{\quad} = 403$$

3. Να βρείτε την τάξη του υπογραμμισμένου ψηφίου σε καθένα από τους παρακάτω αριθμούς :

α) 7.5831 , β) 25.678 , γ) 123452 , δ) 1.324521

4. Ποίος είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός και ποιος ο μικρότερος που μπορεί να σχηματισθεί μόνο με τα ψηφία 0, 5, 8 αν κάθε ψηφίο του χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά ;

5. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με τα υπόλοιπα ψηφία του αριθμού :

$$\alpha) 428 < \dots\dots 6 < 440 \quad \beta) 70.435 < \dots\dots\dots 0 < 70.435.$$

6. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 859.736 στην πλησιέστερη :

α) δεκάδα , β) εκατοντάδα , γ) χιλιάδα , δ) δεκάδα χιλιάδα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- 7.** Αν στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί : α) 43__5 στην πλησιέστερη δεκάδα δίνει 44000. Ποίος είναι ο αριθμός ; β) 2__86 στην πλησιέστερη χιλιάδα. Ποίος είναι ο αριθμός ;
- 8.** Να κατασκευάσετε ένα ημιαξονα με αρχή το σημείο O , το σημείο A να ισαπέχει από το O 2 cm και να παριστάνει τον αριθμό 1. Μετα να τοποθετήσετε τα σημεία B , Γ , Δ σε αποστάσεις 8 cm, 12 cm, 16 cm από το O αντίστοιχα. Ποιοί αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία αυτά ;

1.2 Πρόσθεση –Αφαίρεση –Πολλαπ/μός Φυσικών Αριθμών

Πρόσθεση

$$a + b = \gamma \quad \begin{array}{l} a, b \text{ προσθετέοι} \\ \gamma \text{ άθροισμα των } a, b. \end{array}$$

Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης ;

Οι ιδιότητες πρόσθεσης είναι οι εξής :

- $a + b = b + a$ Αντιμεταθετική
- $a + (b + \gamma) = (a + b) + \gamma$ Προσεταιριστική
- $a + 0 = 0 + a = a$ (Το μηδέν δεν μεταβάλλει το a)

Αφαίρεση

$$M - A = \Delta \quad \begin{array}{l} M \text{ (μειωτέος)}, A \text{ (αφαιρετέος)}, \Delta \text{ (διαφορά)} \end{array}$$

Στους φυσικούς έχουμε $A \leq M$

Πολλαπλασιασμός

$$a \cdot b = \gamma \quad \begin{array}{l} a, b \text{ παράγοντες} \\ \gamma \text{ γινόμενο των } a, b \end{array}$$

Ποιές είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ;

Οι ιδιότητες πολλαπλασιασμού είναι οι εξής :

- $a \cdot b = b \cdot a$ Αντιμεταθετική
- $a \cdot (b \cdot \gamma) = (a \cdot b) \cdot \gamma$ Προσεταιριστική
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ Το 1 δεν μεταβάλλει το a
- $a \cdot (b + \gamma) = a \cdot b + a \cdot \gamma$ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση
- $a \cdot (b - \gamma) = a \cdot b - a \cdot \gamma$ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση

Παράσταση

Παράσταση λέγεται μια σειρά αριθμών και μεταβλητών που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Αριθμητική τιμή παράστασης λέγεται το αποτέλεσμα που βρίσκουμε αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς στην παράσταση, και κάνουμε τις πράξεις.

Προσοχή

Για να βρούμε την αριθμητική τιμή μιας παράστασης :

- κάνουμε πρώτα τους πολλαπλασιασμούς
- και στην συνέχεια προσθέσεις, αφαιρέσεις

Αν υπάρχουν παρενθέσεις εκτελούμε τις πράξεις μέσα σε αυτές με βάση την προηγούμενη προτεραιότητα.

Παραδείγματα

1) Αν $\alpha + \beta = 13$ και $\gamma + \delta = 9$ να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + 5 + \delta + \beta + 3 + \gamma$

Λύση

$$\alpha + 5 + \delta + \beta + 3 + \gamma = \alpha + \beta + \delta + \gamma + 5 + 3 = 13 + 9 + 5 + 3 = 22 + 5 + 3 = 27 + 3 = 30$$

2) Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις :

α) $5 + 3 \cdot 17 - 5 \cdot (8 - 6) - 7$,

β) $15 + 2 \cdot (6 \cdot 2 - 5 \cdot 2) - (13 - 9) \cdot 3$

Λύση

α) $5 + 3 \cdot [17 - 5 \cdot (8 - 6)] - 7 = 5 + 3 \cdot (17 - 5 \cdot 2) - 7 = 5 + 3 \cdot (17 - 10) - 7 = 5 + 3 \cdot 7 - 7 = 5 + 21 - 7 = 26 - 7 = 19$

β) $15 + 2 \cdot (6 \cdot 2 - 5 \cdot 2) - (13 - 9) \cdot 3 = 15 + 2 \cdot (12 - 10) - (13 - 9) \cdot 3 = 15 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 15 + 4 - 12 = 19 - 12 = 7$

3) Να υπολογιστεί με 2 τρόπους η παράσταση $A = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8$

Λύση

A τρόπος

$$A = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8, \quad A = 24 + 16, \quad A = 40$$

B τρόπος

$$A = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8, \quad A = 2 \cdot (12 + 8), \quad A = 2 \cdot 20, \quad A = 40$$

(χρήση επιμεριστικής ιδιότητας)

Εργασία

1) Να υπολογιστεί το γινόμενο $15 \cdot 999$

.....
.....
.....

2) Αν τα $\alpha + \beta = 6$ και $\beta - \gamma = 3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 5 \cdot \alpha + 8 \cdot \beta - 3 \cdot \gamma$$

.....
.....
.....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι πράξεις :

$$\alpha) 37 - (12 - 5), \beta) 37 - 12 + 5, \gamma) (37 - 12) + 5$$

2. Στα παρακάτω σχήματα να αντικαταστήσετε τα γράμματα με ψηφία :

$$\begin{array}{r} \alpha) \quad \begin{array}{r} \alpha\alpha \\ + \alpha\beta \\ \hline 1\beta\alpha \end{array} \quad \beta) \quad \begin{array}{r} \alpha\alpha\beta \\ + \gamma\alpha\beta \\ \hline \alpha 036 \end{array} \end{array}$$

3. Να υπολογιστούν τα γινόμενα με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας :

$$\alpha) 14 \cdot 11 \quad \beta) 25 \cdot 19 \quad \gamma) 25 \cdot 110$$

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

$$\alpha) 237 \cdot 7 + 237 \cdot 3, \quad \beta) 69 \cdot 108 - 67 \cdot 8$$

5. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = \chi + 5 \cdot (2 + \chi) + 3 \cdot (\chi - 2) + 7 \text{ όταν } \chi = 8$$

$$\beta) A = 7 + 3 \cdot (\chi + \psi) + 2 \cdot (\chi - \psi) + \chi \text{ όταν } \chi = 7 \text{ και } \psi = 4$$

6. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$A = 2009 + 2010 \cdot 2009 - 2011 \cdot 2008$$

7. Στο παρακάτω πίνακα αντιστοιχήστε τα στοιχεία της πρώτης στήλης με τα στοιχεία της δεύτερης

Στήλη Α	Στήλη Β
$3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$	$2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$
$3 \cdot (\alpha + \beta)$	300
$2 \cdot (\alpha + \beta)$	$4 \cdot (\alpha + \beta)$
$6 \cdot (\alpha + \beta) - 2 \cdot (\alpha + \beta)$	$3 \cdot 7$
$3 \cdot 28 + 3 \cdot 61 + 3 \cdot 11$	2
$6 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha - 2 \cdot \alpha$	$3 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta$
$2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,9$	1
$4 \cdot (\alpha + 3) - 4 \cdot \alpha - 11$	$7 \cdot \alpha$

8. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$A = 4\alpha + 8\beta + 3\gamma + 2 \cdot \alpha - 2\beta + 5 \cdot \delta + 2 \cdot \gamma - 7 \text{ αν } \alpha + \beta = 7 \text{ και } \gamma + \delta = 10$$

$$B = 3 \cdot (\alpha + \beta - \gamma) + 2 \cdot (\alpha + \beta) + 3 \cdot \gamma + 6 \text{ αν } \alpha + \beta = 7$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών

Τι ονομάζουμε νιοστή δύναμη του αριθμού α:

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ που έχει ν παράγοντες ίσους με α λέγεται **νιοστή δύναμη του αριθμού α** και συμβολίζεται με

α^n δηλαδή $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\text{ν φορές}} \cdot \alpha$.

- Ο αριθμός α λέγεται βάση της δύναμης.
- Ο αριθμός ν λέγεται εκθέτης της δύναμης.
- Ακόμα $\alpha^1 = \alpha, 1^n = 1$.
- Για να υπολογίσουμε μια δύναμη του 10 γράφουμε το 1 και δεξιά του τόσα μηδενικά όσα δηλώνει ο εκθέτης της δύναμης
π.χ. $10^4 = 10.000, 10^6 = 1.000.000$

Παραδείγματα

1) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις : α) $5 \cdot 6^2$ β) $2^2 + 5^3$

Λύση

$$\alpha) 5 \cdot 6^2 = 5 \cdot 36 = 180 \quad \beta) 2^2 + 5^3 = 4 + 125 = 129$$

2) Να γραφούν σε απλούστερη μορφή οι παρακάτω παραστάσεις :

$$\alpha) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \quad \beta) 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Λύση

$$\alpha) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 \quad \beta) 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$$

3) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot (3^3 - 5^2)^3 - (8^2 - 7 \cdot 9)^{2008}$

$$\begin{aligned} \text{Λύση} \quad A &= 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot (3^3 - 5^2)^3 - (8^2 - 7 \cdot 9)^{2008} = 2 \cdot 9 + 2 \cdot (27 - 25)^3 - (64 - 63)^{2008} \\ &= 18 + 2 \cdot 2^3 - 1^{2008} = 18 + 2 \cdot 8 - 1 = 18 + 16 - 1 = 34 - 1 = 33 \end{aligned}$$

Εργασία

1) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις : α) $2^2 \cdot 5^3$, β) $(2^2)^2$, γ) $3^3 + 2^3 - 4^2$

.....
...
.....
.....
.....
.....
.....

2) Να γραφούν σε απλούστερη μορφή οι παραστάσεις :

$$\alpha) x + x + x + x + x + x, \quad \beta) x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

.....
.....
.....
.....

3) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = 3 + (2^2 + 3)^2 - (7 - 5)^3 + (3 \cdot 2)^2$

.....
.....
.....
.....
.....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να γράψετε σε μορφή δυνάμεων τα παρακάτω γινόμενα :

$$\alpha) 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \psi \cdot \psi \cdot \psi \cdot \psi, \beta) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \chi \cdot \chi \cdot 2 \cdot \chi \cdot \chi, \gamma) \chi \cdot \psi \cdot \omega \cdot \omega \cdot \psi \cdot \chi \cdot \chi \cdot 2 \cdot \psi$$

2. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις : $\alpha) 2^4, \beta) 3^3, \gamma) 4^3, \delta) 11^2, \epsilon) 1, 1^2$

3. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο ισότητας ή ανισότητας :

$$\alpha) 3^2 \dots 2^3, \beta) 5^3 \dots 3^5, \gamma) 10^2 \dots 2^{10}, \delta) 1^4 \dots 1^6, \epsilon) 7^2 \dots 2^7$$

4. Βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων τι παρατηρείτε ;

$$A = (5 + 2)^2, B = 5^2 + 2^2$$

5. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = 2 \cdot 5^2 + 2^3 - (4 + 2)^2, B = 3^2 + 3^3 + 2^3 + 2^4, \Gamma = (13 - 2)^2 + 5 \cdot 3^2$$

6. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις

$$\alpha) A = 2 \cdot (9^2 - 3 \cdot 5^2)^2 + (3^2)^2 - (4^3 - 62)$$

$$\beta) B = 12^2 - 2^3 \cdot [3^4 - 5 \cdot (3^3 - 11)]^{2009}$$

7. Αν $\alpha + \beta = 5^3 - 11^2$ και $\beta + \gamma = 13^2 - 12^2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2^3 \cdot \alpha + 3^2 \cdot \beta + 1^{17} \cdot \gamma$.

8. Αν είναι $\chi = 8^2 + 6^2 - 4^3 + 5 \cdot 7$ και $\psi = (6^2 + 3^2) : 5$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

$$A = (\chi + \psi)^2, B = \chi^2 + \psi^2 + 2\chi \cdot \psi, \Gamma = \chi^2 + \psi^2$$

1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

Ποιος είναι ο τύπος της ευκλείδειας διαίρεσης ;

Ο τύπος της ευκλείδειας διαίρεσης είναι : $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ όπου $0 \leq \upsilon < \delta$

Το Δ λέγεται διαιρετέος

Το δ λέγεται διαιρέτης

Το π λέγεται πηλίκο

Το υ λέγεται υπόλοιπο

- Αν το $\upsilon=0$ τότε $\Delta=\delta \cdot \pi$ και η διαίρεση λέγεται τέλεια.
- Αν το $\delta=\Delta$ τότε $\pi=1$ και $\upsilon=0$
- Αν το $\delta=1$ τότε $\Delta=\pi$
- Αν το $\Delta=0$ τότε $\pi=0$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Προσοχή : ο διαιρετής δ δεν
μπορεί να είναι ίσος
με το μηδέν

Παραδείγματα

1) Να εξετάσετε αν η παρακάτω ισότητα εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση
 $19 = 3 \cdot 5 + 4$

Απάντηση

Επειδή το $4 < 5$ αλλά και μεγαλύτερο του 3 επομένως
η ισότητα εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση με $\Delta = 19$, $\delta = 5$, $\pi = 3$ και $\upsilon = 4$

2) Αν ο v είναι φυσικός αριθμός ποια μπορεί να είναι τα υπόλοιπα
διαίρεσης με το 3 και ποιες οι μορφές του v ;

Απάντηση

Έστω π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του v με το
3 δηλαδή $v = 3\pi + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < 3$, (υ φυσικός)

Άρα για $\upsilon=0$ έχουμε $v = 3\pi$

για $\upsilon=1$ έχουμε $v = 3\pi + 1$

για $\upsilon=2$ έχουμε $v = 3\pi + 2$

για $\upsilon=3$ έχουμε $v = 3\pi + 3$

Εργασία

1) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισότητες εκφράζουν ευκλείδειες
διαιρέσεις α) $25 = 6 \cdot 4 + 1$, β) $32 = 2 \cdot 6 + 10$, γ) $322 = 17 \cdot 18 + 16$

α).....

.....

β).....

.....

γ).....

.....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισότητες εκφράζουν ευκλείδειες διαιρέσεις
2. α) $125 = 29 \cdot 4 + 9$, β) $302 = 30 \cdot 10 + 2$, γ) $42 = 2 \cdot 21$, δ) $153 = 30 \cdot 4 + 33$
3. Η ισότητα $\kappa = \lambda \mu + \rho$ με $\rho > \lambda$ και $\rho > \mu$ όπου $\kappa, \lambda, \mu, \rho$ είναι φυσικοί αριθμοί μπορεί να παριστάνει ευκλείδεια διαίρεση ;
4. Σε μια διαίρεση φυσικών αριθμών διαιρετής ήταν το 5 πηλίκο το τετράγωνο του διαιρέτη και υπόλοιπο το μεγαλύτερο δυνατό. Βρείτε τον διαιρετό.
5. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις
 $A = (2^4 + 4^3) : (5^2 - 3^2) - 6^2 : (3 \cdot 2^2)$ $B = (32 + 48) : 4 + (12 : 2 + 20 : 5)^2$
 $\Gamma = 8^2 : 16 + 6^2 : (5 \cdot 8 - 4) + (4 \cdot 9 - 6^2)$ $\Delta = 4^3 : (16 : 2^2) + (3^3 + 2 + 1) : (2 \cdot 5)$
6. Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός που διαιρούμενος με το 12 δίνει πηλίκο 20 ;
7. Η περίμετρος ενός τετραγωνικού οικοπέδου είναι 108 m. Να βρείτε Α) πόσες κολόνες θα χρειαστούμε για την περιφράξη του αν τοποθετηθούν ανά 3m. Β) Να βρείτε πόσες κολόνες θα είναι σε κάθε πλευρά ;
8. Αν $\alpha = 10 - 10 : 5$ και $\beta = (4^3 : 16) \cdot 3$ να υπολογιστεί η παράσταση $\alpha^2 : 32 + (3 \cdot \beta : 12) \cdot [(\alpha + \beta) : 4 + 5]$

1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας --Μ.Κ.Δ-- Ε.Κ.Π--Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πολλαπλάσια του α ;

Πολλαπλάσια ενός αριθμού α λέγονται οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του α με όλους τους φυσικούς αριθμούς δηλαδή είναι οι αριθμοί $0, \alpha, 2 \cdot \alpha, 3 \cdot \alpha, 4 \cdot \alpha, \dots$

- Αν ο αριθμός β είναι πολλαπλάσιο του α τότε $\beta = \nu \alpha$ όπου ο ν είναι φυσικός

Χαρακτήρες διαιρετότητας

- Κάθε φυσικός διαιρεί όλα τα πολλαπλάσια του.
➤ Κάθε φυσικός που διαιρεί έναν άλλο διαιρεί και τα πολλαπλάσια του.
➤ Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιο του.

Αν ο αριθμός ν είναι άρτιος τότε $\nu = 2 \cdot \kappa$

Αν ο αριθμός ν είναι περιττός τότε $\nu = 2 \cdot \kappa + 1$
(με κ φυσικό)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Τι ονομάζουμε Ε.Κ.Π. δυο ή περισσότερων αριθμών

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π) δυο ή περισσότερων αριθμών λέμε το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια το οποίο είναι διαφορετικό του μηδενός.

Τι ονομάζουμε διαιρέτες ενός αριθμού ;

Διαιρέτες ενός αριθμού λέγονται οι αριθμοί που τον διαιρούν.

- Κάθε αριθμός $\alpha \neq 0$ έχει για διαιρέτες τον εαυτό του και τη μονάδα.
- Πρώτος λέγεται ένας αριθμός ο οποίος διαιρείται με τον εαυτό του και τη μονάδα.
- Σύνθετος λέγεται ένα αριθμός που δεν είναι πρώτος.

Τι ονομάζουμε Μ.Κ.Δ. δυο φυσικών αριθμών ;

Μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δυο φυσικών αριθμών α και β λέγεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες των α και β .

Ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι μεταξύ τους ;

Δυο αριθμοί α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta) = 1$.

- Αν $\beta = \kappa \alpha$ τότε $\text{Ε.Κ.Π}(\alpha, \beta) = \beta$ και $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta) = \alpha$.
- Αν α, β πρώτοι μεταξύ τους τότε $\text{Ε.Κ.Π}(\alpha, \beta) = \alpha\beta$.

Ποια τα κριτήρια διαιρετότητας ;

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το :

- 10 , 100 , 1000 , αν λήγει σε ένα ή δύο ή τρία μηδενικά αντίστοιχα.
- 2 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 , 2 , 4 , 6 , ή 8.
- 5 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 , ή 5.
- 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.
- 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.
- 4 αν τα 2 τελευταία του ψηφία σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4.
- 25 αν τα 2 τελευταία του ψηφία σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 25.

Εύρεση του Ε.Κ.Π και του Μ.Κ.Δ

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. δυο ή περισσότερων αριθμών τους αναλύουμε πρώτα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και στη συνέχεια :

- το Ε.Κ.Π. τους είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με το μεγαλύτερο εκθέτη
- το Μ.Κ.Δ. τους είναι το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με το μικρότερο εκθέτη.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παραδείγματα

1) Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των 120 και 180

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{και} \quad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{Ε.Κ.Π.}(120,180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

$$\text{Μ.Κ.Δ.}(120,180) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

2) Να αντικαταστήσετε τα κενά του αριθμού 63 -- - με αριθμούς ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 4 και το 9.

Απάντηση

Για να διαιρείται με το 4 πρέπει τα δυο τελευταία ψηφία να σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4, ενώ με το 9 πρέπει το άθροισμα των ψηφίων να διαιρείται με το 9 άρα ο αριθμός θα γίνει 6336 γιατί το 36 διαιρείται με 4 ενώ το άθροισμα $6 + 3 + 3 + 6 = 18$ διαιρείται το 9.

Εργασία

1) Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των 210 και 135

2) Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς διαιρούνται με το 2, 3, 4, 5, 9, ή 25

Οι παρακάτω αριθμοί διαιρούνται	Με το 2	Με το 3	Με το 4	Με το 5	Με το 9	Με το 25
22.584						
7.375						
5.400						
444						
875						

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των α) 48 και 72 , β) 156 και 104.

2. Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς διαιρούνται με το 2, 3 , 4 , 5, 9, ή 25

Οι παρακάτω αριθμοί διαιρούνται	Με το 2	Με το 3	Με το 4	Με το 5	Με το 9	Με το 25
225						
375						
500						
6.444						
6.1875						

3. Να συμπληρωθούν τα κενά ώστε κάθε αριθμός να διαιρείται με τους διπλανούς :
α) 37-- --με το 3 , β) 256-- -- με 2 και το 5 , γ) 36-- -- με το 3 και το 25 , δ) 7-- 6 -- με το 5 και το 9 ε) 5--3-- με το 9 , με το 2 και το 5.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 2^ο Κλάσματα

2.1 Η έννοια του κλάσματος

Ποια η έννοια του κλάσματος;

Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωριστεί σε n ($n \neq 0$) ίσα μέρη, καθένα από αυτά ονομάζεται νιοστό και συμβολίζεται με $\frac{1}{n}$. Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων που αποτελείται από k ίσα τέτοια μέρη συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{k}{n}$ και διαβάζεται « κάππα νιοστά ».

- Το k ονομάζεται αριθμητής.
 - Το n ονομάζεται παρονομαστής.
- Και οι οι δυο μαζί ονομάζονται όροι του κλάσματος.

Ισχύουν τα εξής :

$$\bullet k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}, \bullet \alpha = \frac{\alpha}{1}, \bullet \frac{\alpha}{\alpha} = 1, \bullet \frac{0}{\alpha} = \alpha$$

$$\bullet \text{Αν } \alpha > \beta \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} > 1 \beta \neq 0$$
$$\bullet \text{Αν } \alpha < \beta \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} < 1 \beta \neq 0$$
$$\bullet \text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = 1 \beta \neq 0$$

- Για να βρούμε την τιμή του μέρους ξεκινάμε από την τιμή του όλου που είναι η τιμή της μονάδας.
- Για να βρούμε την τιμή του όλου ξεκινάμε από την τιμή του μέρους και υπολογίζουμε την τιμή της μονάδας. (αναγωγή στη μονάδα)

Παράδειγμα

Τα $\frac{4}{5}$ των θρανίων ενός Γυμνασίου είναι 60. Να βρείτε :

Α) Πόσα θρανία έχει το Γυμνάσιο. Β) Τα $\frac{3}{5}$ των θρανίων.

Λύση

Α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα

Τα $\frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5}$ είναι 60 θρανία, το $\frac{1}{5}$ των θρανίων είναι $60 : 4 = 15$

$$\text{Άρα τα } \frac{5}{5} = 1 \cdot \frac{1}{5} \text{ των θρανίων είναι } 5 \cdot 15 = 75$$

$$\text{Β) Αφού το } \frac{1}{5} \text{ είναι 15 θρανία τα } \frac{3}{5} \text{ είναι } 3 \cdot 15 = 45$$

Εργασία

Να βρεθούν τα x και ω στα παρακάτω κλάσματα :

$$\alpha) \frac{x-8}{5} = 0, \beta) \frac{7-\omega}{4} = 1, \gamma) \frac{x+10}{16} = 1, \delta) \frac{\omega-7}{1} = 20$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Σε μια τάξη τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών μαθαίνουν αγγλικά. Ποιο είναι το πλήθος των μαθητών της τάξης αν γνωρίζουμε ότι οι μαθητές που παρακολουθούν αγγλικά είναι 54.

2. Τα $\frac{3}{5}$ ενός κιλού κρέατος κοστίζει 5 ευρώ. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{4}$;

3. Να βρεθούν τα x και ω στα παρακάτω κλάσματα :

$$\alpha) \frac{x-14}{5} = 0, \beta) \frac{9-x}{4} = 1, \gamma) \frac{\omega+10}{19} = 1, \delta) \frac{10-\omega}{1} = 0, \epsilon) \frac{x-11}{1} = 15$$

4. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{4}{9}$ της αρχικής τιμής τους. Η έκπτωση σε ένα ρολόι είναι 20 ευρώ.

Ποια είναι η αρχική τιμή του ρολογιού και ποσά χρήματα πρέπει να πληρώσουμε για να το αγοράσουμε.

5. Να γράψετε ως κλάσματα με παρονομαστή το 3 τους αριθμούς : 1, 2, 5, 20.

2.2 Ισοδύναμα κλάσματα

Ποια κλάσματα ονομάζουμε ισοδύναμα ;

Δυο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν την ίδια ποσότητα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών και γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

➤ Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \gamma\beta$.

Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ;

A) Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό k ($k \neq 0$) προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα με το αρχικό δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k \cdot \alpha}{k \cdot \beta} \quad (k \neq 0)$$

B) Όταν διαιρεθούν οι όροι ενός κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη τους ($k \neq 0$) προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα με το αρχικό δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha:k}{\beta:k} \quad (k \neq 0)$$

Τι ονομάζουμε απλοποίηση ενός κλάσματος ;

Απλοποίηση ενός κλάσματος λέγεται η διαδικασία κατά την οποία διαιρώντας τους όρους του κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη τους διάφορο του 1 προκύπτει κλάσμα με μικρότερους όρους.

Ποιο κλάσμα ονομάζουμε ανάγωγο ;

Ανάγωγο κλάσμα λέγεται το κλάσμα το οποίο δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

➤ Διαιρώντας τους όρους ενός κλάσματος με το Μ.Κ.Δ. τους προκύπτει ανάγωγο κλάσμα.

Ποια κλάσματα λέμε ομώνυμα και ποια ετερόνυμα ;

Ομώνυμα λέγονται δυο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρανομαστή.

Ετερόνυμα λέγονται δυο ή περισσότερα κλάσματα που δεν έχουν τον ίδιο παρανομαστή.

Παραδείγματα

1) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα : α) $\frac{5}{7}, \frac{3}{4}$ β) $\frac{3}{5}, \frac{12}{20}$

Λύση

α) Αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους των κλασμάτων χιαστί

έχουμε $\frac{5}{7}, \frac{3}{4}$ τότε $5 \cdot 4 = 20$ και $3 \cdot 7 = 21$ άρα $\frac{5}{7} \neq \frac{3}{4}$ δηλαδή

δεν είναι ισοδύναμα.

β) Όμοια για τα $\frac{3}{5}, \frac{12}{20}$ έχουμε $3 \cdot 20 = 60$ και $5 \cdot 12 = 60$ άρα

$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ δηλαδή είναι ισοδύναμα.

2) Α) να τραπεί το κλάσμα $\frac{7}{12}$ σε ισοδύναμο με παρανομαστή το 60 και

Β) να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{21}{35}$

Λύση

$$Α) \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60} \text{ άρα } \frac{7}{12} = \frac{35}{60} \text{ δηλαδή είναι ισοδύναμα}$$

Β) Βρίσκουμε το Μ.Κ.Δ των 21 και 35 ο οποίος είναι το 7 άρα $\frac{21}{35} = \frac{21:7}{35:7} = \frac{3}{5}$ δηλαδή έγινε ανάγωγο.

3) Να γίνουν ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{1}{6}, \frac{3}{8}$

Λύση

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών δηλ. Ε.Κ.Π.(6,8)=24 και τα μετατρέπουμε σε κλάσματα με παρανομαστή το 24 δηλαδή

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24} \text{ και } \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$$

Εργασία

1) Να απλοποιηθούν τα κλάσματα $\frac{32}{56}, \frac{48}{72}$

2) Να συμπληρωθούν τα κενά ώστε τα κλάσματα $\frac{6}{15} = \frac{24}{\dots}$ και $\frac{144}{256} = \frac{\dots}{16}$ να είναι ισοδύναμα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Συμπληρώστε τα κενά ώστε τα κλάσματα να είναι ισοδύναμα :

$$\alpha) \frac{1}{4} = \frac{2}{\dots} = \frac{\dots}{12} = \frac{4}{\dots} = \frac{\dots}{32} = \frac{9}{\dots} = \frac{\dots}{120}, \beta) \frac{5}{6} = \frac{10}{\dots} = \frac{\dots}{18} = \frac{25}{\dots} = \frac{\dots}{42} = \frac{45}{\dots}$$

2. Όμοια για τα κλάσματα :

$$\alpha) \frac{7}{12} = \frac{\dots}{36}, \beta) \frac{9}{24} = \frac{3}{\dots}, \gamma) \frac{4}{5} = \frac{28}{\dots}, \delta) \frac{7}{5} = \frac{\dots}{45}, \epsilon) \frac{\dots}{7} = \frac{35}{49}$$

3. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα :

$$\alpha) \frac{6}{16}, \beta) \frac{6}{24}, \gamma) \frac{40}{50}, \delta) \frac{48}{36}, \epsilon) \frac{108}{56}$$

4. Το καθένα από τα κλάσματα $\alpha) \frac{1}{2}, \beta) \frac{4}{3}, \gamma) \frac{2}{5}, \delta) \frac{11}{12}, \epsilon) \frac{7}{15}$

5. Μπορεί ένα κλάσμα με παρανομαστή το 3 να μετατραπεί σε ισοδύναμο με παρανομαστή α) το 1521 , β) το 1024. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

6. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα $\alpha) \frac{5}{9}, \frac{3}{100}$ και $\beta) \frac{9}{11}, \frac{7}{6}$

7. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους
 $\alpha) \frac{11}{9}$ και $\frac{110}{91}, \beta) \frac{47}{36}, \frac{64}{49}, \gamma) \frac{100}{580}, \frac{10}{58}$

2.3 Σύγκριση κλασμάτων

Πως γίνεται η σύγκριση δυο κλασμάτων ;

Έχουμε τρεις περιπτώσεις

1) Όταν δυο κλάσματα είναι ομώνυμα μεγαλύτερο είναι αυτό με το μεγαλύτερο αριθμητή
δηλαδή $\alpha < \beta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$

2) Όταν δυο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο παρανομαστή δηλαδή $\alpha < \beta$ τότε $\frac{\gamma}{\alpha} > \frac{\gamma}{\beta}$ με $\alpha, \beta \neq 0$

3) Όταν τα κλάσματα είναι ετερόνυμα με διαφορετικούς αριθμητές τα κάνουμε ομώνυμα και με τα συγκρίνουμε όπως και στην περίπτωση (1).

Εργασία

1) Να συγκριθούν τα παρακάτω ζευγάρια κλασμάτων:

$$\alpha) \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \beta) \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \gamma) \frac{2}{3}, \frac{5}{4}$$

Λύση

α) Επειδή $4 > 2$ και έχουν το ίδιο παρανομαστή μεγαλύτερο είναι αυτό με το μεγαλύτερο αριθμητή δηλαδή $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$.

β) Επειδή $5 < 7$ και είναι κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι αυτό με το μικρότερο παρανομαστή δηλαδή $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$.

γ) Επειδή τα κλάσματα είναι ετερόνυμα με διαφορετικούς αριθμητές για να τα συγκρίνουμε πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \text{ και } \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{15}{12} \text{ οπότε } \frac{8}{12} < \frac{15}{12}$$

$$\text{άρα } \frac{2}{3} < \frac{5}{4}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2) Να βρείτε ένα κλάσμα μεγαλύτερο του $\frac{5}{6}$ και μικρότερο του $\frac{6}{7}$.

Λύση

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και προσπαθούμε να βρούμε ένα κλάσμα

ανάμεσα στα 2 κλάσματα $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}$ και $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{36}{42}$

Όμως μεταξύ των $\frac{35}{42}$ και $\frac{36}{42}$ δεν υπάρχει κάποιο κλάσμα οπότε συνεχίζουμε την διαδικασία κάνοντας ισοδύναμα το καθένα με καινούργια κλάσμα αλλά με τον ίδιο παρανομαστή δηλαδή

$$\frac{35}{42} = \frac{35 \cdot 2}{42 \cdot 2} = \frac{70}{84} \text{ και } \frac{36}{42} = \frac{36 \cdot 2}{42 \cdot 2} = \frac{72}{84} \text{ άρα } \frac{70}{84} < \frac{71}{84} < \frac{72}{84} \quad \text{οπότε}$$
$$\frac{5}{6} < \frac{71}{84} < \frac{6}{7}$$

3) Να συγκρίνετε με την μονάδα τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ και $\frac{\alpha+7}{\alpha}$

Λύση

Επειδή $\alpha + 1 > \alpha$ έχουμε $\frac{\alpha}{\alpha+1} < 1$ και $7 > 6$ έχουμε $\alpha+7 > 6$ άρα $\frac{\alpha+7}{\alpha} > 1$

Εργασία

Να βρείτε ένα κλάσμα μεγαλύτερο του $\frac{4}{3}$ μικρότερο του $\frac{7}{5}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις

1. Συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα :

$$\alpha) \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \beta) \frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \gamma) \frac{2}{9}, \frac{2}{8}, \delta) \frac{401}{24}, \frac{401}{34} \epsilon) \frac{7}{6}, \frac{1}{2}, \sigma\tau) \frac{1}{3}, \frac{2}{7}$$

2. Να συγκρίνετε με τη μονάδα τα παρακάτω κλάσματα :

$$\alpha) \frac{4}{5}, \beta) \frac{7}{3}, \gamma) \frac{15}{21}, \delta) \frac{65}{71}$$

3. Όμοια για τα παρακάτω κλάσματα :

$$\alpha) \frac{\alpha}{\alpha+4}, \beta) \frac{\alpha+2}{\alpha}, \gamma) \frac{\beta+5}{\beta+6}$$

4. Να βρείτε ένα κλάσμα :

$$\alpha) \text{ μεγαλύτερο του } \frac{2}{3} \text{ και μικρότερο του } \frac{3}{4}$$
$$\beta) \text{ μεγαλύτερο του } \frac{5}{7} \text{ και μικρότερο του } \frac{5}{8}$$

5. Να συγκρίνετε τα κλάσματα :

$$\alpha) \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta+1}, \beta) \frac{\chi}{\psi}, \frac{\chi+2}{\psi}, \gamma) \frac{\alpha}{\alpha+2}, \frac{\alpha}{\alpha+4}, \delta) \frac{\omega}{\varphi+4}, \frac{\omega+1}{\varphi}, \epsilon) \frac{\alpha}{\alpha+4}, \frac{\alpha+4}{\alpha}$$

6. Αν $\frac{3}{4} < \frac{24}{\alpha} < \frac{4}{5}$ να βρεθεί η τιμή του φυσικού αριθμού α .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2.4 Πρόσθεση –Αφαίρεση κλασμάτων

Πως προσθέτουμε ή αφαιρούμε δυο ομώνυμα κλάσματα ;

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δυο ομώνυμα κλάσματα προσθέτουμε ή αφαιρούμε αντίστοιχα τους αριθμητές και αφήνουμε τον κοινό παρονομαστή τους δηλαδή: $\frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} =$

$$\frac{a+\beta}{\gamma} \text{ ή } \frac{a}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a-\beta}{\gamma}$$

Πως προσθέτουμε ή αφαιρούμε δυο ετερόνυμα κλάσματα ;

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δυο ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και στη συνέχεια τα προσθέτουμε ή τα αφαιρούμε αντίστοιχα.

Ποιος αριθμός ονομάζεται μεικτός ;

Μεικτός αριθμός ονομάζεται το άθροισμα ενός ακέραιου με ένα κλάσμα δηλαδή $a + \frac{\beta}{\gamma} = a\frac{\beta}{\gamma}$ με $\beta < \gamma$ και $\neq 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ

$$a\frac{\beta}{\gamma} \neq a \cdot \frac{\beta}{\gamma}$$

Παραδείγματα

1) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

$$\alpha) \frac{5}{7} + \frac{3}{7} + \frac{12}{14}, \beta) 2 + \frac{1}{4}, \gamma) \frac{5}{2} - 1, \delta) \frac{7}{6} - 1 + \frac{3}{4}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{5}{7} + \frac{3}{7} + \frac{12}{14} = \frac{5}{7} + \frac{3}{7} + \frac{6}{7} = \frac{5+3+6}{7} = \frac{14}{7} = 2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Αν μπορούμε να κάνουμε} \\ \text{απλοποίηση σε ένα κλάσμα} \\ \text{καλό είναι να γίνεται} \\ \text{πριν τις πράξεις} \end{array} \right)$$

$$\beta) 2 + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3} \text{ ή } 2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{1} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\gamma) \frac{5}{2} - 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{1} = \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\delta) \frac{7}{6} - 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{6} - \frac{1}{1} + \frac{3}{4} = \frac{14}{12} - \frac{12}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$$

2) Να μετατρέψετε α) το μεικτό $3\frac{2}{5}$ σε απλό κλάσμα β) το $\frac{14}{3}$ σε μεικτό.

Λύση

$$\alpha) 3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

β) Από την ευκλείδεια διαίρεση έχουμε $14 = 4 \cdot 3 + 2$

$$\frac{14}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3) Να υπολογιστεί η παράσταση $2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)$

Λύση

$$2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$2 - \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right) - \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{2}{1} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{12}{6} - \frac{1}{6} - \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

Εργασία

Να υπολογιστεί η παράσταση $A = 1 - \frac{2^3 - 3 \cdot 2}{15 - 3^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^{2010}$

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις

α) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{5} + \frac{3}{20}$, γ) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6} + 1$, δ) $\frac{9}{7} - \frac{2}{3}$, ε) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$, στ) $2 - \frac{5}{3}$, ζ) $\frac{7}{15} - \frac{1}{12} + \frac{3}{5} - \frac{5}{6}$, η) $1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{4}$

2. Να μετατραπούν οι παρακάτω μεικτοί σε κλάσματα α) $2\frac{3}{5}$, β) $5\frac{7}{12}$, γ) $1\frac{1}{3}$

3. Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε μεικτούς α) $\frac{7}{3}$, β) $\frac{15}{7}$, γ) $\frac{41}{12}$

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις

α) $\frac{7}{2^3} - \frac{5^2 - 6 \cdot 4}{4} + 1^{10}$, β) $\frac{1}{2} - \frac{6^2 - 4 \cdot 9}{123} + \frac{12^2 - 5 \cdot 2^3}{104}$, γ) $\frac{7 + 3 \cdot 2}{1 + 5^2} + \frac{5 \cdot (3^2 - 2^3)^{40}}{7^2 - 6 \cdot 4}$

$\frac{7^2 - 49}{24}$

5. Όμοια α) $2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$, β) $\frac{13}{4} - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 1$

6. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$ να υπολογιστεί η παράσταση $A = \frac{\alpha + 3 \cdot \beta}{\beta}$

7. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{2}$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha + \beta}{\beta} + \frac{5 \cdot \gamma - 10 \cdot \delta}{\delta}$

8. Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{3}{7}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{4}{5}$.

9. Σε ένα Γυμνάσιο η Α και η Β τάξη έχουν τα $\frac{3}{8}$ και το $\frac{1}{3}$ των μαθητών του Γυμνασίου αντίστοιχα. Ποιο μέρος των μαθητών του Γυμνασίου έχει η Γ τάξη;

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

10. Η Χριστίνα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων της στο κυλικείο του σχολείου, το $\frac{1}{3}$ για την αγορά ενός τετραδίου και τα $\frac{2}{5}$ για την αγορά ενός στυλό. Να βρείτε το μέρος των χρημάτων που της έμειναν.

2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Τι γνωρίζετε για τον πολλαπλασιασμό δυο κλασμάτων ;

Το γινόμενο δυο κλασμάτων είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών δηλαδή $\frac{a}{b} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{b \cdot \delta}$

Τι γνωρίζετε για τον πολλαπλασιασμό ενός φυσικού με ένα κλάσμα ;

Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με ένα κλάσμα είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του φυσικού με τον αριθμητή και παρονομαστή τον παρονομαστή του κλάσματος δηλαδή $a \cdot \frac{b}{\gamma} = \frac{a \cdot b}{\gamma}$.

Ποιοι αριθμοί λέγονται αντίστροφοι ;

Αντίστροφοι λέγονται δυο αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με την μονάδα δηλαδή $a \cdot \beta = 1$

Ο αντίστροφος του $\frac{a}{b}$ είναι ο $\frac{b}{a}$. Το 1 έχει αντίστροφο τον εαυτό του.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστούν τα γινόμενα α) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6}$, β) $4 \cdot \frac{2}{5}$, γ) $\frac{5}{7} \cdot 8$, δ) $2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{3}{4}$

Λύσεις α) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 6} = \frac{15}{42}$, β) $4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5}$, γ) $\frac{5}{7} \cdot 8 = \frac{5 \cdot 8}{7} = \frac{40}{7}$, δ) $2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{3}{4} = \frac{11}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{165}{20}$

2) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right)$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{4} + \frac{2}{4}\right) = \left(\frac{15}{10} - \frac{12}{10}\right) \cdot \left(\frac{25}{20} - \frac{20}{20} + \frac{4}{20}\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{9}{20} \\ &= \frac{18^9}{200^{100}} = \frac{9}{100} \end{aligned}$$

Εργασία

Να υπολογιστεί η παράσταση $A = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα γινόμενα α) $5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$, β) $\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{14}$, γ) $\frac{6}{5} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$

2. Να βρεθούν οι αντίστροφοι αριθμοί των αριθμών α) $\frac{2}{3}$, β) $\frac{1}{7}$, γ) 5, δ) $4\frac{2}{3}$

3. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$\alpha) \frac{2}{3} \cdot \left(3 - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{7}{6} - 1\right) \cdot 5 - \frac{2}{3}, \beta) \frac{7-3 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{2^3}{3} - 1\right) \quad \gamma) 2 \cdot \left[\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(3 - \frac{5}{2}\right) \cdot 2 + \frac{1}{3}\right]$$

$$\delta) 1 + \frac{5^2 - 3 \cdot 6}{3^2 - 4} \cdot 2 - 3\frac{1}{5} \quad \varepsilon) 2 + 3 \cdot \left(\frac{10}{3} - \frac{3^4 - 9 \cdot 8}{3 \cdot 4 - 3^2}\right) - \frac{13^2 - 16 \cdot 9}{5^2} \cdot 2$$

4. Αν $\frac{\kappa}{\lambda} = 2$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις

$$A = \frac{3 \cdot \kappa + 5 \cdot \lambda}{\lambda}, B = \frac{7 \cdot \kappa - 2 \cdot \lambda}{3 \cdot \lambda}, \Gamma = \frac{2 \cdot \kappa + 3 \cdot \lambda}{5 \cdot \kappa}$$

5. Να υπολογίσετε το γινόμενο $A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)$

6. Ένα λεωφορείο έχει 40 επιβάτες. Σε μια στάση κατεβαίνουν τα $\frac{3}{8}$ των επιβατών των οποίων τα $\frac{4}{5}$ είναι γυναίκες. Πόσες γυναίκες κατέβηκαν στην πρώτη στάση;

2.6 Διάρθρωση κλασμάτων

Πως διαιρούμε δυο φυσικούς αριθμούς;

Για να διαιρέσουμε δυο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη δηλαδή $\boxed{\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}}$

Πως διαιρούμε δυο κλάσματα;

Για να διαιρέσουμε δυο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη δηλαδή $\boxed{\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}}$

Ποιο κλάσμα λέμε σύνθετο;

Ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα λέγεται σύνθετο.

Μετατροπή σύνθετου σε απλό κλάσμα

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad \text{δηλαδή} \quad \boxed{\left[\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} \right] = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}}$$

$$\text{ειδικά} \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παραδείγματα

1) Να γίνουν απλά τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα $\alpha) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}, \beta) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{5}}, \gamma) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{5}}, \delta) \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}}$

Λύση

$$\alpha) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}, \quad \beta) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{5}} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}, \quad \gamma) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{5}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{10}{3}, \quad \delta) \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{4}{2} = 2$$

2) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = \frac{2 - \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{3}{5}} + 1$

Λύση

$$A = \frac{2 - \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{3}{5}} + 1 = \frac{\frac{2}{1} - \frac{3}{2}}{\frac{6}{5}} + 1 = \frac{\frac{4}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{6}{5}} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{5}} + 1 = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 6} + 1 = \frac{5}{12} + \frac{12}{12} = \frac{17}{12}$$

Εργασία

Να υπολογιστεί η παράσταση $A = \frac{3}{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}} : \frac{1}{2}$

Ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις :

$$\alpha) \frac{4}{7} + \frac{3}{7} : \frac{5}{2}, \quad \beta) \frac{3}{5} : 2 + \frac{1}{2} : \frac{1}{3}, \quad \delta) 1 + \left(\frac{2}{3} : 4\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(6 : \frac{3}{2}\right) \cdot 5, \quad \epsilon) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{2} - 1\right)$$
$$\sigma\tau) 2 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{3}\right), \quad \zeta) 1 + \left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{3}{10}\right) : \frac{1}{5} + \frac{7}{2}, \quad \eta) \frac{5^2 - 4 \cdot 6}{7} : \frac{4^3 - 7 \cdot 3^2}{2^3 - 5} + \frac{1}{2}$$

2. Να γίνουν απλά τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα $\alpha) \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{7}}, \beta) \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{4}}, \gamma) \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{5}}, \delta) \frac{\frac{3}{3}}{\frac{5}{3}}, \epsilon) \frac{\frac{5}{5}}{\frac{2}{2}}$

3. Να γίνουν οι πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις

$$A = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{2}{3}, \quad B = \frac{3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} : \frac{4}{3}}, \quad \Gamma = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} : \frac{1 - \frac{1}{2}}{3}, \quad \Delta = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

4. Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{2}{3}$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha+1}{1-\beta} + \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha+\beta}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 3^ο

Δεκαδικοί αριθμοί

3.1 Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

Ποιο κλάσμα λέμε δεκαδικό :

Δεκαδικό λέγεται ένα κλάσμα που έχει παρονομαστή μια δύναμη του 10.

Π.χ $\frac{4}{10}, \frac{32}{1000}$.

Ποια τα μέρη ενός δεκαδικού αριθμού :

Ένας δεκαδικός αριθμός έχει το ακέραιο και το δεκαδικό μέρος του, τα οποία χωρίζονται από την υποδιαστολή.

Π.χ 4,275 τότε 4 το ακέραιο μέρος και 275 το δεκαδικό μέρος

Ποιες είναι οι τάξεις του δεκαδικού μέρους :

Οι τάξεις του δεκαδικού μέρους είναι από τα αριστερά προς τα δεξιά : δέκατα , χιλιοστά , δεκάκις χιλιοστά , εκατοντάκις χιλιοστά , εκατομμυριοστά κ.λ.π.

Διάταξη δεκαδικών αριθμών

Πως συγκρίνουμε δυο δεκαδικούς αριθμούς :

➤ Αν δυο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο διαφορετικής τάξης μεγαλύτερος είναι αυτός που το αρχικό ψηφίο είναι μεγαλύτερης τάξης.

Π.χ $3,56 < 14,34$

➤ Αν δυο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το μεγαλύτερο ψηφίο στην τάξη αυτή.

Π.χ $5,37 < 6,8$ αφού $5 < 6$

➤ Αν δυο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης και το ψηφίο αυτό είναι το ίδιο, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το αμέσως επόμενο ψηφίο μεγαλύτερο.

Π.χ $5,48 < 5,69$ αφού $4 < 6$

Στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών

Για να στρογγυλοποιήσουμε δεκαδικούς αριθμούς ενεργούμε όπως και στους φυσικούς αριθμούς.

Παραδείγματα

1) Να γραφούν σαν κλάσματα οι δεκαδικοί αριθμοί : α) 2,56 και β) 0,0045

Λύση

$$\alpha) 2,56 = \frac{256}{100} \quad \text{και} \quad \beta) 0,0045 = \frac{45}{10000}$$

2) Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{37}{16}$ σε δεκαδικό κλάσμα.

Λύση

$$\frac{37}{16} = 37 : 16 = 2,3125, \text{ άρα } 2,3125 = \frac{23125}{10000}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εργασία

Να γράψετε το κλάσμα $\frac{3}{8}$ ως δεκαδικό με προσέγγιση δεκάτου και εκατοστού

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις

1. Να γραφούν ως δεκαδικά κλάσματα οι δεκαδικοί α) 1,125, β) 0,43, γ) 0,04.
2. Να γραφούν τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικοί αριθμοί α) $\frac{31}{100}$, β) $\frac{45}{6}$.
3. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικά με προσέγγιση δέκατου και εκατοστού και χιλιοστού α) $\frac{5}{3}$, β) $\frac{4}{7}$.
4. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα σε δεκαδικά α) $\frac{3}{4}$, β) $\frac{17}{8}$, γ) $\frac{35}{16}$.
5. Συγκρίνετε τους αριθμούς α) 52,345 και 52,359 , β) 203,34 και 203,345.
6. Συμπληρώστε το ψηφίο που λείπει στον αριθμό 12,6__7 αν γνωρίζετε ότι όταν ο αριθμός στρογγυλοποιηθεί στο πλησιέστερο εκατοστό γίνεται 12,66.

3.2 Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό

Τι γνωρίζετε για τις πράξεις μεταξύ δεκαδικών ;

- Στην πρόσθεση και στην αφαίρεση τοποθετούμε τους δεκαδικούς αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο ώστε τα ψηφία της ίδιας τάξης να είναι στην ίδια στήλη και οι υποδιαστολές επίσης στην ίδια στήλη.
- Στον πολλαπλασιασμό δυο δεκαδικών αριθμών τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη των δυο παραγόντων του πολλαπλασιασμού.
- Στη διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη και το διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός.

Πως μεταβάλλεται ένας δεκαδικός αριθμός αν πολλαπλασιαστεί με 0,1 , 0,01 , 0,001 ή διαιρεθεί με 10 , 100 , 1000..... ;

Όταν ένας δεκαδικός πολλαπλασιαστεί με 0,1 , 0,01 , 0,001... ή διαιρεθεί 10,100,1000 ,.... μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά μια , δυο , τρειςθέσεις αντίστοιχα.

Πς μεταβάλλεται ένας δεκαδικός αριθμός αν διαιρεθεί με 0,1 , 0,01 , 0,001..... ή πολλαπλασιαστεί με 10 , 100 , 1000..... ;

Όταν ένας δεκαδικός πολλαπλασιαστεί με 10 , 100 , 1000... ή διαιρεθεί με 0,1 , 0,01 , 0,001,....μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα δεξιά μια , δυο , τρεις ...θέσεις αντίστοιχα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Τι γνωρίζετε για τις δυνάμεις των δεκαδικών αριθμών;

Οι δυνάμεις των δεκαδικών αριθμών ορίζονται όπως στους φυσικούς και έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών. Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που έχει μια δύναμη δεκαδικού αριθμού προκύπτει από το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της βάσης επί τον εκθέτη της δύναμης.

$$\text{π.χ } 1,1^2 = 1,21, 0,11^2 = 0,0121, 0,011^2 = 0,000121$$

Ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

$$\alpha) 1,62 + 0,045 + 13,2, \beta) 4 - 3,42, \gamma) 3,4 \cdot 2,6, \delta) 14,4 : 1,2, \epsilon) 11,475 : 4,25.$$

2. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις : $\alpha) 0,3^2, \beta) 0,2^3, \gamma) 1,2^2, \delta) 0,05^3$

3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = 1,3^2 : 0,01 + 3,2 \cdot (5,6 - 4,1) - 0,7^2 \cdot 100$

4. Να γίνουν οι πράξεις :

$$\alpha) \frac{0,3}{0,2} + \frac{1}{6}, \beta) \frac{0,05}{0,4} + \frac{0,6}{1,2} + \frac{3,2}{16}, \gamma) 0,7 - \frac{0,12}{1,8} + \frac{5}{4,5}, \delta) \frac{1,2}{0,6} \cdot \frac{5}{4}, \epsilon) \frac{1,5}{5} + 0,2 \cdot \frac{8}{3,2} + \frac{2}{0,5} : 1,6$$

3.3 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

Τι γνωρίζετε για την τυποποιημένη μορφή ενός μεγάλου αριθμού;

Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha \cdot 10^n$, δηλαδή γινόμενο ενός αριθμού α επί μια δύναμη του 10. Την μορφή αυτή την ονομάζουμε τυποποιημένη.

➤ Ο αριθμός α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος ψηφίο μεγαλύτερο του ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 δηλαδή $1 \leq \alpha < 10$

$$\text{π.χ } 325.000.000.000.000.000 = 3,25 \cdot 10^{17}$$

Ασκήσεις

1. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή τους :

$$\alpha) 127.000, \beta) 34.600.000, \gamma) 72.000.000.000.000$$

2. Να γράψετε στην δεκαδική μορφή τους αριθμούς $\alpha) 2,7 \cdot 10^5, \beta) 1,85 \cdot 10^7$

3. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις

$$A = 2,3 \cdot 10^7 - 7,56 \cdot 10^5, B = (5,8 \cdot 10^3) \cdot (3,5 \cdot 10^5),$$

$$\Gamma = (0,31 \cdot 10 + 525,5 \cdot 0,01) : 0,0001$$

Μονάδες μέτρησης

➤ Μονάδες μέτρησης μήκους

Μονάδα μέτρησης μήκους είναι το μέτρο (m)

Υποδιαιρέσεις του μέτρου

$$1dm = \frac{1}{10}m = 0,1m \text{ δεκατόμετρο (παλάμη)}$$

$$1cm = \frac{1}{100}m = 0,01m \text{ εκατοστόμετρο (πόντος)}$$

$$1mm = \frac{1}{1000}m = 0,001m \text{ χιλιοστόμετρο (χιλιοστό)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πολλαπλάσια του μέτρου : $1\text{km} = 1000\text{ m}$ χιλιόμετρο
 $1\text{ ναυτικό μίλι} = 1852\text{ m}$ (ναυσιπλοΐα)

➤ Μονάδες μέτρησης εμβαδού

Μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2)

Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου

$$1\text{dm}^2 = \frac{1}{100}\text{m}^2 = 0,01\text{m}^2 \text{τετραγωνικό δεκατόμετρο}$$

$$1\text{cm}^2 = \frac{1}{10000}\text{m}^2 = 0,0001\text{m}^2 \text{τετραγωνικόδεκατοστόμετρο}$$

$$1\text{mm}^2 = \frac{1}{1000000}\text{m}^2 = 0,000001\text{m}^2 \text{τετραγωνικόχιλιοστόμετρο}$$

Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου : $1\text{km}^2 = 1.000.000\text{ m}^2$ τετραγωνικό χιλιόμετρο και το στρέμμα $1\text{στρεμμα} = 1000\text{m}^2$.

➤ Μονάδες μέτρησης όγκου

Μονάδα μέτρησης όγκου είναι το κυβικό μέτρο (m^3)

Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου

$$1\text{dm}^3 = \frac{1}{1.000}\text{m}^3 = 0,001\text{m}^3 \text{κυβικόδεκατόμετρο.}$$

$$1\text{cm}^3 = \frac{1}{1.000.000}\text{m}^3 = 0,000001\text{m}^3 \text{κυβικόδεκατοστόμετρο.}$$

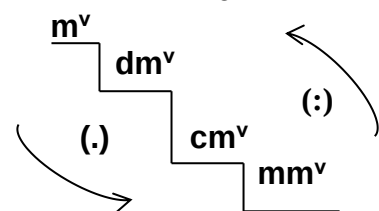
$$1\text{mm}^3 = \frac{1}{1.000.000.000}\text{m}^3 = 0,000000001\text{m}^3 \text{κυβικόχιλιοστόμετρο.}$$

Για τη μέτρηση του όγκου χρησιμοποιούμε και το dm^3 που ονομάζεται λίτρο (lt)
 $1\text{ lt} = 1\text{ dm}^3 = 0,001\text{m}^3$.

Το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο (ml) $1\text{ml} = 0,001\text{lt} = 1\text{cm}^3$.

Γενικά :

- Αν $v = 1$ κάθε σκαλοπάτι διαφέρει με το επόμενο κατά 10.
- Αν $v = 2$ κάθε σκαλοπάτι διαφέρει με το επόμενο κατά 100.
- Αν $v = 3$ κάθε σκαλοπάτι διαφέρει με το επόμενο κατά 1000.



Όταν κατεβαίνουμε σκαλοπάτι
κάνουμε πολλαπλασιασμό ενώ
όταν ανεβαίνουμε κάνουμε διαίρεση.

➤ Μονάδες μέτρησης χρόνου

Η βασική μονάδα χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (s)

Πολλαπλάσια του δευτερολέπτου

1 λεπτό (min) $1\text{ min} = 60\text{s}$

1 ώρα (1h) $1\text{ h} = 60\text{ min} = 3600\text{ s}$

1 ημέρα $1\text{ ημέρα} = 24\text{ h} = 1440\text{ min} = 8400\text{ s}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

➤ Μονάδες μέτρησης μάζας

Η βασική μονάδα μέτρησης μάζας είναι το χιλιόγραμμα ή το κιλό (kg)

Υποδιαιρέσεις του κιλού

$$1 \text{ γραμμάριο (g)} \quad 1g = \frac{1}{1000} kg = 0,001kg$$

$$1 \text{ χιλιοστόγραμμα (mg)} \quad 1mg = \frac{1}{1000} g = \frac{1}{1.000.000} kg$$

Πολλαπλάσιο του κιλού είναι ο τόνος (t) $1t = 1000kg$.

Ασκήσεις

1. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω κενά :

$$\begin{aligned} \alpha) 1m &= \dots\dots\dots cm, \beta) 1m = \dots\dots\dots mm, \gamma) 1cm^2 = \dots\dots\dots m^2, \delta) 1dm^2 = \dots\dots\dots mm^2 \\ \epsilon) 1dm^3 &= \dots\dots\dots mm^3 \quad \sigma\tau) 1mm^3 = \dots\dots\dots m^3, \zeta) 1km = \dots\dots\dots m \quad \eta) 1lt \\ &= \dots\dots\dots dm^3 \end{aligned}$$

2. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

$$\alpha) 1mm = \frac{1}{100} m, \quad \beta) 1dm^3 = 1000mm^2$$

α	β	γ	δ

$$\gamma) 1cm^3 = 1000mm^3, \quad \delta) 1cm^3 = \frac{1}{100} dm^3$$

3. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα εμβαδά : $53,7cm^2, 0,54cm^2, 538.000mm^2, 5372cm^2$

4. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους όγκους : $449cm^3, 0,000000045m^3, 448.000mm^3, 0,452dm^3$

5. Μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου μήκος $\alpha = 2,5m$, πλάτος $\beta = 14dm$, ύψος $\gamma = 350cm$. Πόσα lt χωράει ;

6. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά :

$$\alpha) 25h = \dots\dots\dots min \quad \beta) 480s = \dots\dots\dots min$$

$$\gamma) 32min50s = \dots\dots\dots s \quad \delta) 2h75min20s = \dots\dots\dots s$$

7. Όμοια :

$$\alpha) 2,5kg = \dots\dots\dots g, \quad \beta) 750g = \dots\dots\dots kg$$

$$\gamma) 13,7t = \dots\dots\dots kg, \quad \delta) 1,2g = \dots\dots\dots mg$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 7^ο

Θετικοί – Αρνητικοί Αριθμοί

7.1 Ρητοί – Ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου

Ποια είναι τα πρόσημα;

Τα πρόσημα είναι τα σύμβολα $+$, $-$ τα οποία τα γράφουμε _μπροστά από τους αριθμούς εκτός από το μηδέν.

Ποιοι αριθμοί λέγονται θετικοί και ποιοι αρνητικοί;

Θετικός λέγεται ο αριθμός που έχει μπροστά το πρόσημο $+$.

Αρνητικός λέγεται ο αριθμός που έχει μπροστά το πρόσημο $-$.

Ποιοι αριθμοί λέγονται ομόσημοι και ποιοι ετερόσημοι;

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο , δηλαδή όλοι οι θετικοί ή όλοι οι αρνητικοί.

Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικά πρόσημα , δηλαδή ένας αρνητικός και ένα θετικός.

Ποιοι αριθμοί λέγονται ακέραιοι;

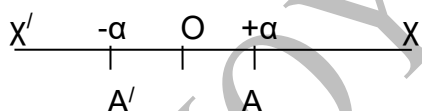
Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς δηλαδή -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3

Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί;

Ρητοί αριθμοί είναι οι φυσικοί , τα κλάσματα και οι δεκαδικοί μαζί με αντίστοιχους αρνητικούς.

Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία του άξονα

Έστω οι αντικείμενες ημιευθείες Ox και Ox' οι οποίες φτιάχνουν τον άξονα xx' .



➤ Αν ο θετικός αριθμός a αντιστοιχίζεται στο σημείο A τότε ο αριθμός a λέγεται τετμημένη του A .

➤ Ο ημιάξονας Ox λέγεται θετικός ημιάξονας.

➤ Ο ημιάξονας Ox' λέγεται αρνητικός ημιάξονας.

Εργασία

1) Δίνονται οι αριθμοί -3 , $+4$, -6 , $+8$, -9 , $+18$ να σχηματίσετε ζεύγη ομόσημων και ετερόσημων αριθμών.

Ομόσημοι :

Ετερόσημοι :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Ποια από τα παρακάτω ζευγάρια είναι ομόσημοι και ποια ετερόσημοι : α) -2 , +5 , β) +8 , +2 , γ) -4 , -72 , δ) +3,2 , -9

2. Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες α και β αντίστοιχα. Να βρείτε την τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ όταν :

α) $\alpha = +3$, $\beta = +7$, β) $\alpha = -2$, $\beta = -5$.

3. Τοποθετήστε στον άξονα τα σημεία : - 5 , +6 , -8 , +3 , 0 , +1.

7.2 Απόλυτη τιμή ρητού –Αντίθετοι ρητοί –Σύγκριση

Τι εκφράζει απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α :

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη α από την αρχή Ο του άξονα και συμβολίζεται με $|α|$ π.χ $|-2| = 2$, $|+5| = 5$ δηλαδή $|α| \geq 0$.

Ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίθετοι :

αντίθετοι ονομάζονται δυο ετερόσημοι αριθμοί με την ίδια απόλυτη τιμή π.χ. οι αριθμοί : - 2 , +2 γιατί $|-2| = |+2| = 2$

- Ο αντίθετος του μηδέν είναι το μηδέν.
- Για ένα αριθμό χ ο αντίθετος του είναι ο -χ και ισχύει $|χ| = |-χ|$
- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός π.χ $|+6| = 6$
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του π.χ $|-6| = -(-6) = +6$

Σύγκριση ρητών

Ο μεγαλύτερος από δυο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

Ειδικότερα :

- Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.
- Κάθε αρνητικός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Μεγαλύτερος από δυο θετικούς είναι αυτός με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
- Μεγαλύτερος από δυο αρνητικούς είναι αυτός με την μικρότερη απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα

1) Ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή 8 ;

Απάντηση

Αφού η απόλυτη τιμή είναι 8 οι αριθμοί είναι +8 και το -8 γιατί
 $|+8| = |-8| = 8$

2) Να συγκριθούν οι παρακάτω ρητοί :

α) -3 , +2 β) -4 , -5 γ) +6 , 0 δ) 0 , -5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Απάντηση

α) $-3 < +2$, β) $-4 > -5$ γ) $0 < +6$ δ) $0 > -5$.

3) Να υπολογιστεί η παράσταση

$$A = |-3| + |+5| - |-3| + |7|$$

Απάντηση

$$A = |-3| + |+5| - |-3| + |7|$$

$$A = 3 + 5 - 3 + 7$$

$$A = 8 - 3 + 7$$

$$A = 5 + 7$$

$$A = 12$$

Εργασία

1) Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί αν $1 < |x| < 3$

.....
.....
.....
.....

2) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = |-6| + |-10| - |-12| + |0|$

.....
.....
.....
.....

Ασκήσεις

1. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λάθος

α) Για οποιοδήποτε αριθμό a ισχύει ότι $|a| \geq 0$ Σ. Λ.

β) Αν $a < 0$ τότε $|a| = -a$ Σ. Λ.

γ) Δυο αντίθετοι αριθμοί μη μηδενικοί είναι ετερόσημοι Σ. Λ.

δ) Δυο σημεία με τετμημένες αντίθετους αριθμούς είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων Σ. Λ.

ε) Αν $|x| = 21$ τότε $x = 21$ ή $x = -21$ Σ. Λ.

δ) $-(+2) = -2$ Σ. Λ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

x	-4					
$-x$		-1				
$-(-x)$			5			
$ x $				6		
$ -x $					7	
$- -x $						-9

3. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

$$\alpha) |-3| + |-8| + |-2|, \beta) |-10| \cdot |-9| - \frac{|-8| \cdot |-5|}{|-10|}, \gamma) |-3| + 5 \cdot |+2| - |-1| \cdot |+4|,$$

$$\delta) |-2| - \frac{|-5|}{|-6| - 4} + \frac{|0|}{235}, \epsilon) \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| 3 - \frac{5}{2} \right| + |5 \cdot 2 - 7|$$

4. Συγκρίνετε δυο αριθμούς που έχουν απόλυτες τιμές οι οποίες διαφέρουν κατά 1.

5. Συμπληρώστε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$, ή $>$, τα παρακάτω κενά :

$$\alpha) -3 \dots -2, \beta) -7 \dots -1, \gamma) 0 \dots +4, \delta) -10 \dots -11, \epsilon) 3 \dots -38$$

$$\sigma\tau) +22 \dots 35, \zeta) |+5| \dots |-5|, \eta) |-9| \dots |+5|, \theta) |-2| \dots -|-2|, \iota) -4 \dots -(-4)$$

6. Να βρείτε το x όταν : $\alpha) |x| = \frac{5}{3}, \beta) |x| = 0, \gamma) |x| = 1,2$

7. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x (αν υπάρχουν) $\alpha) |x| < 2, \beta) |x| = 0, \gamma) |x| \leq 2$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών

Πως προσθέτουμε ομόσημους αριθμούς;

Για να προσθέσουμε δυο ή περισσότερους ομόσημους ρητούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Παραδείγματα

$$\begin{aligned} (+2) + (+7) &= |+2| + |+7| = +(2 + 7) = +9 \\ (-2) + (-7) &= |-2| + |-7| = -(2 + 7) = -9 \\ (-3) + (-8) + (-5) &= -(|-3| + |-8| + |-5|) = -(3 + 8 + 5) = -16 \end{aligned}$$

Πως προσθέτουμε ετερόσημους αριθμούς;

Για να προσθέσουμε δυο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά τους βάζουμε το πρόσημο του ρητού με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα

$$\begin{aligned} (-2) + (+7) &= |-2| + |+7| = +(7 - 2) = +5 \\ (+2) + (-7) &= |+2| + |-7| = -(7 - 2) = -5 \\ (-8) + (+5) &= |-8| + |+5| = -(8 - 5) = -3 \end{aligned}$$

Ποιες οι ιδιότητες της πρόσθεσης;

Οι ιδιότητες πρόσθεσης είναι οι εξής:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ Αντιμεταθετική
- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ Προσεταιριστική
- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ (Το μηδέν δεν μεταβάλλει το α)
- $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ Αντίθετοι αριθμοί

Ποιοι αριθμοί λέγονται αντίθετοι;

Αντίθετοι λέγονται οι αριθμοί οι οποίοι έχουν άθροισμα ίσο με το μηδέν.

Πως υπολογίζουμε το άθροισμα πολλών προσθετέων;

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα πολλών προσθετέων οι οποίοι δεν είναι ομόσημοι ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- 1^{ον} Διαγράφουμε τους αντίθετους όρους (αν υπάρχουν).
- 2^{ον} Χωρίζουμε τους θετικούς με τους αρνητικούς.
- 3^{ον} Προσθέτουμε χωριστά τους θετικούς και τους αρνητικούς.
- 4^{ον} Προσθέτουμε τα δυο αθροίσματα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$1) (-5) + (+3) + (-7) + (+5) + (-12) + (+6)$$

$$2) (-8) + (+5) + (-6) + (+14) + (-4) + (-14)$$

Λύση

$$1) (-\cancel{5}) + (+3) + (-7) + (+\cancel{5}) + (-12) + (+6) = (+3) + (+6) + (-7) + (-12) = (+9) + (-19) = -10$$

$$2) (-8) + (+5) + (-6) + (+\cancel{14}) + (-4) + (-\cancel{14}) = (-8) + (-6) + (-4) + (+5) = (-18) + (+5) = -13$$

Εργασία

1) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα :

$$1) (-7) + (-8) = |4) (-6) + (+6) =$$

$$2) (-7) + (+8) = |5) (+10) + 0 =$$

$$3) (+7) + (-8) = |6) (-14) + (+11) =$$

2) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα :

$$A = (-3) + (+7) + (-5) + (+2) + (-6) + (+3)$$

$$B = (-5) + (-7) + (+8) + (-10) + (+7) + (-4)$$

Ασκήσεις

1. Ελέγξτε αν έχουν γίνει σωστά οι πράξεις και διορθώστε τις λάθος συμπληρώνοντας το παρακάτω πίνακα :

$$1) (+4) + (-8) = -4, 2) (-10) + (-12) = (-2), 3) (+6) + (-9) = (-3)$$

$$4) (+3) + (-3) = -8, 5) (-9) + (+12) = +4, 6) (+12) + (-1) = +11$$

<u>Ερώτημα</u>	1	2	3	4	5	6
Σωστό						
Διόρθωση						

2. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

+	- 34	- 19	+ 20	16	+23	-32	-10
+ 19							
- 45							
- 54							
+ 62							
- 32							
+ 49							
+ 21							

3. Να τοποθετήσετε στις τελείες τα κατάλληλα πρόσημα :

α) $(...5) + (+3) = 8$, β) $(-7) + (...4) = -11$, γ) $(...7) + (...8) = 15$

δ) $(...5) + (...2) = -3$, ε) $(...9) + (...9) = 0$

4. Να συμπληρωθούν τα κενά :

α) $(.....) + (+3) = +8$, β) $(+7) + (.....) = 2$

γ) $(.....) + (+5) = -8$, δ) $(-5) + (.....) = -12$

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα :

$A = (-5) + (+9) + (-10) + (+3)$

$B = 7 + (-10) + (+5) + (-13) + (+10)$

$\Gamma = (+5) - 2 + (-7) + 9$

$\Delta = -2 + 5 - 13 + 2 - 7 + 7 + 3 - 8$

$E = -6 + 5 - 7 - 3 + 2 - 8 + 7$

7.4 Αφαίρεση ρητών

Για να αφαιρέσουμε από τον ρητό α τον αριθμό β προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β δηλαδή $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ π.χ. $(+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -(5 - 3) = -2$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστούν οι παρακάτω διαφορές :

α) $(-5) - (-4)$, β) $(-8) - (+7)$, γ) $(-8) - (-19)$, δ) $(+8) - (+12)$

Λύση

α) $(-5) - (-4) = (-5) + (+4) = -(5 - 4) = -1$,

β) $(-8) - (+7) = (-8) + (-7) = -(8 + 7) = -15$,

γ) $(-8) - (-19) = (-8) + (+19) = +(19 - 8) = +11$,

δ) $(+8) - (+12) = (+8) + (-12) = -(12 - 8) = -4$

2) Να υπολογιστεί η παράσταση $A = (-8) + (+6) - (-4) + (-2) - (+7) + (+3)$

Λύση

$A = (-8) + (+6) - (-4) + (-2) - (+7) + (+3) = (-8) + (+6) + (+4) + (-2) + (-7) + (+3)$

$= (+6) + (+4) + (+3) + (-8) + (-2) + (-7) = 6 + 4 + 3 - 8 - 2 - 7 = 13 - 17 = -4$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3) Να λύσετε τις εξισώσεις α) $x + (+3) = -8$, β) $x - 7 = -10$, γ) $13 - x = 20$

Λύση

$$\alpha) x + (+3) = -8 \quad \text{ή} \quad x = -8 - (+3) \quad \text{ή} \quad x = -8 - 3 \quad \text{ή} \quad x = -11,$$

$$\beta) x - 7 = -10 \quad \text{ή} \quad x = -10 - (-7) \quad \text{ή} \quad x = -10 + 7 \quad \text{ή} \quad x = -3,$$

$$\gamma) 13 - x = 20 \quad \text{ή} \quad x = 13 - 20 \quad \text{ή} \quad x = -7$$

Εργασία

Αν $x = -5$, $y = -7$ και $z = -3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = x + y - z$$

Λύση

.....
.....
.....
.....

Απαλοιφή παρενθέσεων

➤ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το (+) (ή δεν έχει πρόσημο) μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το (+) (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα ίδια πρόσημα τους.

$$\text{Π.χ. } +(-2+7-6-5+1) = -2+7-6-5+1$$

➤ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το (-) μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το (-) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα αντίθετα πρόσημα.

$$\text{Π.χ. } -(-2+7-6-5+1) = +2-7+6+5-1$$

➤ Σε μια παράσταση η οποία περιέχει παρενθέσεις και αγκύλες η απαλοιφή γίνεται από το εσωτερικό της παράστασης προς το εξωτερικό της οπότε η αγκύλη θα γίνει η παρένθεση.

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = -3 + [-7 - (3-6)]$ με δυο τρόπους: α) κάνοντας τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, β) απαλείφοντας τις παρενθέσεις.

Λύση

$$\alpha) A = -3 + [-7 - (3 - 6)] = -3 + [-7 - (-3)] = -3 + (-7 + 3) = -3 + (-4) = -3 - 4 = -7$$

$$\beta) A = -3 + [-7 - (3 - 6)] = -3 + (-7 - 3 + 6) = -3 - 7 - 3 + 6 = -13 + 6 = -7$$

Εργασία

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A = (3 - 5) + (-7 + 2) - (3 - 7 + 1)$$

$$B = (-3 + 2) - (5 - 3) + (7 - 8)$$

Λύση

.....
.....
.....
.....
.....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω διαφορές :

$$\alpha)(-2) - (-5), \beta)(+6) - (-4), \gamma)(-8) - (+2), \delta)(-16,4) - (-12,4), \varepsilon)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right), \sigma\tau)\left(-3\frac{5}{6}\right) - \left(+2\frac{2}{3}\right)$$

2. Να γίνουν οι πράξεις :

$$\alpha)(-42) - (-23) - (+32) + (+23), \beta)\left(+\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1)$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A = 20 - (\chi + \psi + 4) - (-\chi - \psi + 16), B = -(-\psi + \chi - 12) + (\chi - \psi - 11)$$

$$\Gamma = (-\chi + \psi - 18) - (\psi - \chi - 12), \Delta = -[-40 - (-30 - 15)] - [(18 - 25) + (-30 - 15)]$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha)\chi - (+12) = 1, \beta)\chi + (-15) = -18, \gamma)\chi + (-8) = +10$$
$$\delta)\chi + (+25) = 0, \varepsilon)\chi + (-7) = -7, \sigma\tau) - \chi - 8 = -12$$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A = -(\chi - \psi) - [10 - (\chi + \psi)] \text{ αν } \chi = -4 \text{ και } \psi = -5$$

$$B = -[-(\chi + \psi) + (\psi - \chi)] \text{ αν } \chi = -1 \text{ και } \psi = 1$$

$$\Gamma = 18 - (-\chi + \psi - 2) + (\chi - \alpha) - 20 - (\psi - \alpha) \text{ αν } \chi - \psi = 4$$

$$\Delta = 3 - [\alpha - (\beta - \chi)] - (\psi - \alpha) - (\beta - 1) \text{ όταν } \chi + \psi = 6$$

6. Στις παρακάτω παραστάσεις να βάλετε τον 2^ο και τον 3^ο όρο σε παρένθεση που να έχει μπροστά το (-) και τους δυο τελευταίους όρους σε παρένθεση που να έχει μπροστά το (+): $A = 3 - x + 5 + \psi - 2, B = 5 + 7 - \chi - \psi + 2$

7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Τι γνωρίζετε για το πρόσημο του γινομένου δυο ετερόσημων και δυο ομόσημων ρητών αριθμών;

Το γινόμενο δυο ετερόσημων ρητών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός

Δηλαδή αν : $\alpha < 0, \beta > 0$ τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ ή $\alpha > 0, \beta < 0$ τότε $\alpha \cdot \beta < 0$.

Το γινόμενο δυο ομόσημων ρητών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

Δηλαδή αν : $\alpha > 0, \beta > 0$ τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ ή $\alpha < 0, \beta < 0$ τότε $\alpha \cdot \beta > 0$.

Αντίστροφα

Αν $\alpha \cdot \beta < 0$ τότε $\alpha < 0, \beta > 0$ ή $\alpha > 0, \beta < 0$ (δηλαδή α, β ετερόσημοι).

Αν $\alpha \cdot \beta > 0$ τότε $\alpha > 0, \beta > 0$ ή $\alpha < 0, \beta < 0$ (δηλαδή α, β ομόσημοι).

Ποιές είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού;

Οι ιδιότητες πολλαπλασιασμού είναι οι εξής :

➤ $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ Αντιμεταθετική

➤ $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ Προσεταιριστική

➤ $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha$ Το 1 δεν μεταβάλλει το α

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

➤ $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$

➤ $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς πρόσθεση

➤ $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση

Γενικά

$$\begin{array}{ll} + \cdot - = - & - \cdot + = - \\ + \cdot + = + & - \cdot - = + \end{array}$$

Γινόμενο πολλών παραγόντων

➤ Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (που κανένας δεν είναι μηδέν) πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε :

✗ Το πρόσημο «+» αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο**.

✗ Το πρόσημο «-» αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό**.

➤ Αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες ενός γινομένου είναι μηδέν τότε και το γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα :

$\alpha)(+2) \cdot (+15), \beta)(-3) \cdot (-2), \gamma)(-4) \cdot (+2), \delta)(+8) \cdot (-3)$

Λύση

$$\begin{array}{l} \alpha)(+2) \cdot (+15) = +(2 \cdot 15) = +30, \beta)(-3) \cdot (-2) = +(3 \cdot 2) = +6, \\ \gamma)(-4) \cdot (+2) = -(4 \cdot 2) = -8, \delta)(+8) \cdot (-3) = -(8 \cdot 3) = -24 \end{array}$$

2) Όμοια : $\alpha) 2 \cdot (-3) \cdot (+5) \cdot (-1) \cdot (-6), \beta) -5 \cdot (-4) \cdot (+3) \cdot (+2)$

Λύση

$$\alpha) 2 \cdot (-3) \cdot (+5) \cdot (-1) \cdot (-6) \left\{ \begin{array}{l} \text{το πλήθος των αρνητικών παραγόντων} \\ \text{είναι ίσο με 3 δηλαδή} \\ \text{περιττός άρα το γινόμενο θα έχει πρόσημο (-)} \end{array} \right\} = -(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6) = -180$$

$$\beta) -5 \cdot (-4) \cdot (+3) \cdot (+2) \left\{ \begin{array}{l} \text{το πλήθος των αρνητικών παραγόντων} \\ \text{είναι ίσο με 2 δηλαδή} \\ \text{άρτιος άρα το γινόμενο θα έχει πρόσημο (+)} \end{array} \right\} = +(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) = +120$$

Εργασία

Αν $\alpha = -3$, $\beta = -5$, $\gamma = -1$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \alpha \cdot \beta - 4 \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$

Λύση

.....
.....
.....
.....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα :

$$\alpha) (-2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (-6), \quad \beta) (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5) \cdot (+1) \cdot (-6)$$

$$\gamma) \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{4}{5}\right) \cdot (-8) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right), \quad \delta) (-100) \cdot (+100) \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) \cdot \left(+\frac{1}{100}\right)$$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο πρόσημο :

$$\alpha) (-1) \cdot (+4) \cdot (\dots 5) \cdot (-3) = -60$$

$$\beta) (-2) \cdot (+5) \cdot (\dots 7) \cdot (-4) = +280$$

$$\gamma) (-1) \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (\dots 1) = -1$$

$$\delta) (-3) \cdot (+3) \cdot (\dots 3) \cdot (-3) \cdot (+3) = +243$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων αν $\chi = -1$, $\psi = -2$, $\omega = +1$:

$$A = \chi \cdot (\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi) \cdot (\chi + \omega)$$

$$B = -4 \cdot (\chi - \omega) \cdot [-(\chi + \psi) - (\chi - \psi)]$$

$$\Gamma = -\chi \cdot (-\psi) \cdot (-\omega) \cdot (\chi - \psi) \cdot (\chi - \omega)$$

$$\Delta = -10 \cdot (-\chi) \cdot (\psi + \omega) \cdot [-(\psi - \chi) - \omega]$$

4. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι και οι χ, ψ αντίστροφοι να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha - (5 - \beta) - \chi \cdot (3 - \psi) + 3 \cdot \chi$

7.6 Διαίρεση ρητών αριθμών

Πως διαιρούμε δυο ρητούς :

Για να διαιρέσουμε δυο ρητούς αριθμούς διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε :

~~α~~ Το πρόσημο «+» αν είναι ομόσημοι.

~~β~~ Το πρόσημο «-» αν είναι ετερόσημοι.

Γενικά

$$\begin{array}{l} + : - = - \\ - : + = - \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + : + = + \\ - : - = + \end{array}$$

Προσοχή

Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

Επίσης

➤ Για να διαιρέσουμε δυο ρητούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη δηλαδή : $\alpha \div \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} \div \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$

➤ Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha \div \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται λόγος του α προς β και ορίζεται ως μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot \chi = \alpha$ με $\beta \neq 0$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παραδείγματα

1) Να υπολογίσετε τα πηλίκα :

$$\alpha) -36 : (-9), \beta) 48 : (-12), \gamma) \frac{-3,6}{-1,2}, \delta) \frac{5}{3} : \left(-\frac{1}{6}\right)$$

Λύση

$$\alpha) -36 : (-9) = +(36 : 9) = +4, \beta) 48 : (-12) = -(48 : 12) = -4, \\ \gamma) \frac{-3,6}{-1,2} = +\frac{3,6}{1,2} = +3, \delta) \frac{5}{3} : \left(-\frac{1}{6}\right) = -\left(\frac{5}{3} : \frac{1}{6}\right) = -\frac{5}{3} \cdot 6 = -\frac{30}{3} = -10$$

2) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις : α) $15 - \frac{-6 \cdot (-2)}{-3} + 8$, β) $-\frac{3}{-5} + \frac{-2}{3} + \frac{-4}{-15}$

Λύση

$$\alpha) 15 - \frac{-6 \cdot (-2)}{-3} + 8 = 15 - \frac{+12}{-3} + 8 = \\ 15 - \left(-\frac{12}{3}\right) + 8 = 15 + \frac{12}{3} + 8 = 15 + 4 + 8 = 27 \\ \beta) -\frac{3}{-5} + \frac{-2}{3} + \frac{-4}{-15} = -\left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{4}{15}\right) = \\ -\frac{3}{5} - \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = -\frac{9}{15} - \frac{10}{15} + \frac{4}{15} = -\frac{19}{15} + \frac{4}{15} = -\frac{15}{15} = -1$$

Εργασία

Να υπολογιστεί η παράσταση $A = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{4}{3} : \left(\frac{1}{2} - 1\right) : \left(-\frac{5}{2}\right)$

Λύση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω πηλίκα:

$$\alpha) (+12) : (-3), \beta) (-12) : (-3), \gamma) (-12) : (-3), \\ \delta) \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right), \epsilon) \left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{15}{4}\right), \sigma\tau) \left(-\frac{3}{2}\right) : (+4)$$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$\alpha) -3 \cdot \chi = -6, \beta) 4 \cdot \chi = -12, \gamma) -5 \cdot \chi = -\frac{2}{3}, \delta) -\frac{3}{2} \cdot \chi = -\frac{10}{3}$$

3. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις : α) $-\frac{4}{3} + \frac{-7}{-5}$, β) $-3 - \frac{-5}{-3} + \frac{-6}{+8}$, γ) $-\frac{5}{6} : \left(-3 + \frac{-7}{-2}\right) - \frac{1}{2} \cdot$

$$\left[-3 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1\right], \delta) \frac{1-\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}-2}, \epsilon) \frac{1-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}}{7-2 \cdot (-5)}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{3}{2}$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις $\alpha) A = \frac{\alpha+\beta}{\beta}, \beta) B = \frac{\alpha-\beta}{\beta}, \gamma) \Gamma = \frac{2\cdot\alpha+3\cdot\beta}{5\cdot\beta}$

5. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

$\alpha) \frac{(-3)\cdot 2 + 2\cdot(-4)}{-5\cdot 2 - 4}, \beta) \frac{(-4)+(-7)\cdot(-4)}{(-4)\cdot(-4)+4\cdot 4}, \gamma) \left(\frac{-2}{3} + \frac{4}{-3}\right) : \left(-\frac{-4}{5} + \frac{3}{-5}\right)$
 $\delta) \frac{[(-2)\cdot(+8) - 5\cdot(-3)] \cdot 6 \cdot [-7\cdot(-2) - 4]}{12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + [-6\cdot(-2+8) + 4\cdot(-5)]}$

7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

Πότε ένας ρητός γράφεται ως δεκαδικός :

- Αν ένας ρητός είναι ακέραιος τότε γράφεται ως δεκαδικό κλάσμα .
Π.χ. $-21 = \frac{-210}{10}$
- Αν ένας ρητός είναι κλάσμα ανάγωγο τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
 - ✗ Αν ο παρανομαστής γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 5 και του 2 δηλαδή $2^k \cdot 5^n$ τότε ο ρητός γράφεται ως δεκαδικός.
Π.χ. $\frac{37}{20} = \frac{37}{2^2 \cdot 5} = 1,85$
 - ✗ Αν ο παρανομαστής δεν γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 5 και του 2 δηλαδή $2^k \cdot 5^n$ τότε ο ρητός δε γράφεται ως δεκαδικός.
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τους **περιοδικούς δεκαδικούς** δηλαδή δεκαδικούς με επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία των οποίων το πλήθος το ονομάζουμε περίοδος. Π.χ. $\frac{10}{3} = 3,3333... = 3,\bar{3}$
- Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλασματικού ρητού.

Παράδειγμα

Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους δεκαδικούς: $\alpha) 0,\bar{7}, \beta) 3,2\bar{8}$

Λύση

$$\alpha) \text{Έστω } x = 0,\bar{7} \text{ ή } x = 0,7777... \text{ ή } 10 \cdot x = 7,777... \text{ άρα}$$
$$10 \cdot x - x = 7,7777... - 0,7777... \text{ ή } 9 \cdot x = 7 \text{ ή } x = \frac{7}{9}$$

$$\beta) \text{Έστω } x = 3,2\bar{8} \text{ ή } x = 3,28888... \text{ ή } 10 \cdot x = 32,8888...$$
$$\text{ή } 100 \cdot x = 328,8888... \text{ ή } 100 \cdot x - 10 \cdot x = 328,8888... - 32,8888...$$
$$\text{ή } 90 \cdot x = 296 \text{ ή } x = \frac{296}{90}$$

Ασκήσεις

1. Να γράψετε με δεκαδική μορφή τους ρητούς : $\alpha) -\frac{7}{10}, \beta) \frac{17}{20}, \gamma) \frac{5}{3}, \delta) -\frac{91}{44}$

2. Να βρείτε την κλασματική μορφή των δεκαδικών :

$$\alpha) 3,2, \beta) -5,45, \gamma) 1,\bar{5}, \delta) 3,\bar{26}, \sigma\tau) 9,7\bar{3}, \zeta) 1,2\bar{75}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

Τι γνωρίζετε για τη δύναμη με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό ;

Δύναμη με βάση ένα ρητό αριθμό a και εκθέτη φυσικό αριθμό $n > 1$ λέγεται το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a και συμβολίζεται με a^n

Δηλαδή $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$ Ακόμη $a^1 = a$

Πρόσημο δύναμης

~~Δύναμη~~ με βάση θετικό είναι θετικός δηλαδή $a > 0$ τότε $a^n > 0$

~~Δύναμη~~ με βάση αρνητικό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός δηλαδή
 $a < 0$ και $n = 2k$ τότε $a^n > 0$

~~Δύναμη~~ με βάση αρνητικό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός δηλαδή
 $a < 0$ και $n = 2k + 1$ τότε $a^n < 0$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

- * Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών δηλ. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$.
- * Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου δηλ. $a^n : a^m = a^{n-m}$.
- * Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό δηλ. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
- * Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε όρο του πηλίκου στον εκθέτη αυτό δηλ. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.
- * Για να υψώσουμε μια δύναμη σε ένα εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών αυτό δηλ. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Παραδείγματα

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n} \quad 5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad 5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5^1$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6 = 729$$

Προσοχή!!!

Αν n άρτιος τότε $(-a)^n = a^n$ π.χ. $(-3)^2 = 3^2$ ενώ $-3^2 = -9$
αυτό συμβαίνει γιατί το $-a^n$ είναι ο αντίθετος της δύναμης a^n , το « - » είναι πρόσημο της δύναμης και όχι της βάσης.

Αν n περιττός τότε $(-a)^n = -a^n$ π.χ. $(-3)^3 = -3^3$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παραδείγματα

$(-4)^2 = +16$ αρνητική βάση, άρτιος εκθέτης

$-4^2 = -16$ αντίθετος του 4^2

$(-5)^3 = -125$ αρνητική βάση, περιττός εκθέτης

$-(-2)^5 = -(-32) = +32$ αντίθετος του $(-2)^5$

Να υπολογιστεί η παράσταση $A = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{8^3}{(-4)^3} - \frac{(-6)^4}{16}$

Λύση

$$A = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{8^3}{(-4)^3} - \frac{(-6)^4}{16} = \frac{9}{4} - \frac{8^3}{-4^3} - \frac{6^4}{2^4} = \frac{9}{4} - \left(\frac{8}{-4}\right)^3 - \left(\frac{6}{2}\right)^4 = \frac{9}{4} - (-2)^3 - (3)^4 = \frac{9}{4} - (-8) - 81 = \frac{9}{4} + 8 - 81 = \frac{9}{4} - 73 = \frac{9}{4} - \frac{292}{4} = -\frac{283}{4}$$

Εργασία

1) Να γραφούν με μια δύναμη οι παρακάτω δυνάμεις :

α) $\chi^6 \cdot \chi^7$, β) $\omega^6 : \omega^4$, γ) $3^7 : 81$, δ) $24^3 : 27$, ε) $25 \cdot \psi^2$

Λύση

2) Αν $\chi = -2$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = 9 \cdot \chi^3 - 3 \cdot \chi^2 - 5 \cdot \chi - 1$

Λύση

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις:

α) $(-8)^2$, β) $(-2)^7$, γ) -5^2 , δ) $-(-3)^3$, στ) $-(-5)^2$, ζ) $-[-(-1)^3]$

2. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = -5^2 + (-5)^3 + 5^3 + 5^2 + 5$$

$$B = (-2)^5 + (-2)^4 - (-2)^3 + (-2)^2 + 2$$

$$\Gamma = (-8)^3 + 8^2 + (-8)^2$$

$$\Delta = 6^2 - (-6)^2 - 6^4 - (-6)^3$$

$$E = -1^5 + (-1)^7 - (-1)^8 + (-1)^9 + (-1)^{10} - 1^{12}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3. Να γράψετε με τη μορφή μια δύναμης τα παρακάτω γινόμενα :

$$\alpha) 3^{18} \cdot 3^9 \cdot 3^{-5} \cdot 3^{-6}, \beta) 4^5 \cdot 4^{17} \cdot 4^{-8} \cdot 4^{-6}, \gamma) (-2)^7 \cdot (-2)^9 \cdot (-2)^{-5} \cdot (-2)^{-4}$$

$$\delta) \left(-\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^9 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{20} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-15}$$

4. Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα παρακάτω σύμβολα : < , > , =.

$$\alpha) (-3) \dots 0, \beta) (-5) \dots 0, \gamma) (-2)^7 \dots 0, \delta) (-1)^{19} \dots 1$$

$$\epsilon) (-4)^5 \dots 0, \sigma\tau) (-1)^8 \dots 1, \zeta) (-10)^5 \dots 0, (-7)^4 \dots 0.$$

5. Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις :

$$\alpha) [(-2)^3]^2, \beta) [(-1)^5]^6, \gamma) [(-1)^3]^3$$

6. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = (-20)^4 : 10^4 + 36^3 : (-12)^3 - 25 : 5^2$$

$$B = \frac{15^4}{(-3)^4} - \frac{68^5}{34^5} + \frac{(-128)^4}{64^4} + \frac{(-512)^3}{(-128)^3}$$

$$\Gamma = (-2) \cdot [8 - (-2)^3] + [(-8)^2]^3 : 4^6$$

$$\Delta = -(-3)^2 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot (-2)^1$$

7. Αν $\alpha = -2$, $\beta = -3$, $\gamma = -1$ να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = \alpha^3 - \beta^2 - \gamma^{17}, B = 3 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \beta^3 - 3 \cdot \gamma^2, \Gamma = \gamma^6 + \alpha \cdot \beta^2 - \beta \cdot \alpha^3$$

7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Τι γνωρίζετε για τη δύναμη ρητού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη το 0 ;

Δύναμη ρητού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη το 0 είναι ίση με τη 1 δηλαδή $\alpha^0 = 1$ με $\alpha \neq 0$

Τι γνωρίζετε για τη δύναμη ρητού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη αρνητικό αριθμό ;

Δύναμη ρητού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη αρνητικό αριθμό ίση με ένα κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με τον θετικό εκθέτη, δηλαδή $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^v$ με $\alpha \neq 0$

$$\text{Επίσης } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v \text{ με } \alpha, \beta \neq 0$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις: $\alpha) (-5)^{-2}, \beta) \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}, \gamma) (+2)^{-3}$

Λύση

$$\alpha) (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}, \beta) \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{-3}\right)^2 = \left(+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \gamma) (+2)^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εργασία

Αν $\chi = -2$ να υπολογιστεί η παράσταση $A = \chi^\chi + 2^{-2+\chi} + 4^\chi$

Λύση

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις :

$$\alpha) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \beta) (-5)^{-2}, \gamma) \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}, \delta) 10^{-3}$$

2. Όμοια :

$$\alpha) (-2)^3 \cdot (-2)^{-5}, \beta) [(-5)^{-1}]^2, \gamma) 5^7 \cdot 5^9, \delta) [(-3)^{-2}]^3, \epsilon) (-4)^3 \cdot (-4)^5, \sigma\tau) \left(\frac{7}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$$

3. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = -(-3)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{8}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad B = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^{-4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad \Gamma = \frac{49 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{14 \cdot 10^{-2}}$$

4. Όμοια :

$$A = \chi \cdot (2 - 2^{\chi+4}) + 4^\chi \cdot 2^\chi \text{ αν } \chi = -2$$

$$B = 3^{-4-\chi} + 3^{1-\chi} + 3 \cdot \chi \text{ αν } \chi = -1$$

$$\Gamma = (-1)^{\chi+1} \cdot 2^{\chi-1} \cdot (-3)^{\chi-2} \text{ αν } \chi = 1$$

$$\Delta = 2^{18+\chi} : 2^{14+\psi} + 128 : 2^{10+\chi+\psi} \text{ αν } \chi = -2 \text{ και } \psi = -1$$

$$E = 4^{10+\chi+\psi} \times 4^{-(\chi+\psi)} : 4^{\chi-12 \cdot \psi} \text{ αν } \chi = -2 \text{ και } \psi = -1$$

5. Αν $\alpha \cdot \beta = -2$ να υπολογιστεί η παράσταση $A = 5 \cdot \alpha^3 \cdot \beta^3 - \frac{\alpha^{-2}}{\beta^2}$

7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών .

- Οι πολύ μεγάλοι αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα $\alpha \cdot 10^v, 1 \leq \alpha < 10$ όπου v φυσικός.
- Οι πολύ μικροί αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα $\alpha \cdot 10^{-v}, 1 \leq \alpha < 10$ όπου v φυσικός.

Παραδείγματα

Να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί : α) 470.000.000 , β) 0,0000035

Λύση

α) Τοποθετούμε την υποδιαστολή μεταξύ του 4 και του 7 για να προκύψει δεκαδικός με ακέραιο μέρος μεταξύ του 1 και του 10 άρα $4,7 \cdot 10^8$.

β) Τοποθετούμε την υποδιαστολή μεταξύ του 3 και του 5 για να προκύψει δεκαδικός με ακέραιο μέρος μεταξύ του 1 και του 10 άρα $3,5 \cdot 10^{-6}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 4^ο

Εξισώσεις

4.1 Έννοια της εξίσωσης—Είδη εξισώσεων

Τι ονομάζουμε εξίσωση με ένα άγνωστο ;

Εξίσωση με ένα άγνωστο λέμε μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα ο οποίος λέγεται άγνωστος.

Τι ονομάζουμε λύση ή ρίζα της εξίσωσης ;

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο επαληθεύει την εξίσωση.

Τι ονομάζουμε επίλυση της εξίσωσης ;

Επίλυση της εξίσωσης λέγεται η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης.

Ποια εξίσωση ονομάζουμε αόριστη (ή ταυτότητα) και ποια αδύνατη ;

- Μια εξίσωση λέγεται **αόριστη (ή ταυτότητα)** όταν οποιοσδήποτε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης, δηλαδή είναι της μορφής $0 \cdot x = 0$.
- Μια εξίσωση λέγεται **αδύνατη** όταν δεν υπάρχει αριθμός ο οποίος να είναι λύση της εξίσωσης, δηλαδή είναι της μορφής $0 \cdot x = \alpha$ με $\alpha \neq 0$.

Είδη εξισώσεων—Λύση εξισώσεων

Εξίσωση	Λύση
1) $x + \alpha = \beta$	$x = \beta - \alpha$
2) $\alpha + x = \beta$	$x = \beta - \alpha$
3) $x - \alpha = \beta$	$x = \beta + \alpha$
4) $\alpha - x = \beta$	$x = \alpha - \beta$
5) $\alpha \cdot x = \beta$	$x = \beta : \alpha$
6) $x \cdot \alpha = \beta$	$x = \beta : \alpha$
7) $x : \alpha = \beta$	$x = \beta \cdot \alpha$
8) $\alpha : x = \beta$	$x = \alpha : \beta$

Εργασία

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

1) $x + 6 = 10$, 2) $x - 7 = 10$, 3) $\frac{5}{3} - x = \frac{3}{2}$, 4) $3 \times x = 6$, 5) $x : 5 = 3$, 6) $8 : x = 4$,
7) $\frac{x+2}{6} + 1 = \frac{3}{2}$, 8) $\frac{x+5}{8} = \frac{3}{4}$, 9) $\frac{x+2}{3} = \frac{8}{6}$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Λύση

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

A. $\alpha) 3 + \chi = 5, \beta) \chi + 5 = 8, \gamma) \chi - 5 = 8, \delta) \frac{3}{2} = \chi + \frac{1}{3}, \epsilon) \alpha - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
B. $\alpha) 3 \cdot \chi = 6, \beta) 8 = 2 \cdot \chi, \gamma) 3 \cdot \psi = \frac{6}{5}, \delta) 6 : \chi = 2, \epsilon) \chi : \frac{2}{3} = 5, \sigma\tau) 5 : \chi = 2$
Γ. $\alpha) \frac{\chi}{3} = 5, \beta) \frac{\psi}{3} = \frac{2}{5}, \gamma) \frac{5}{\zeta} = \frac{2}{3}, \delta) \frac{5}{6} = \frac{\chi}{4}, \epsilon) \frac{2}{5} = \frac{7}{\chi}$

2. Όμοια :

A. $\alpha) 2 \cdot x + 8 = 14, \beta) 3 \cdot \chi - 5 = 7, \gamma) 1 - \frac{\chi}{5} = \frac{2}{3}, \delta) \frac{\chi}{3} + 2 = \frac{5}{2}, \epsilon) 5 \cdot \chi - 4 \cdot \chi + 4 = 8$
B. $\alpha) 5 \cdot (\chi + 2) = 15, \beta) 3 \cdot (\chi + 1) + 5 \cdot (2 + \chi) = 18, \gamma) \frac{\chi + 2}{3} = \frac{4}{5}, \delta) \frac{\chi - 2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

3. Να βρείτε τις τιμές του ν (φυσικού) ώστε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα να είναι φυσικός αριθμός : $\alpha) \frac{2}{\nu+1}, \beta) \frac{4}{\nu-2}, \gamma) \frac{\frac{63}{3}}{\frac{\nu+1}{2}}$.

4. Αν $3 \cdot \alpha + 2 + 3 \cdot \beta = 14$, να υπολογιστεί η τιμή του $\alpha + \beta$.

5. Αν $3 \cdot \alpha + 2(\alpha + 1) + 5 \cdot (2 + \beta) = 43$, να υπολογιστεί η τιμή του $\alpha + \beta$.

6. Αν $\frac{\chi+5}{3} + \frac{\psi-2}{5} = 2$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{5}$.

7. Αν $\frac{\chi+1}{\chi} + \frac{\psi+2}{\psi} = 3$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{1}{\chi} + \frac{2}{\psi}$.

8. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις ποιες **δεν** έχουν νόημα τα παρακάτω κλάσματα : $\alpha) \frac{1}{\chi-2}, \beta) \frac{4}{3\chi-2}, \gamma) \frac{12 \cdot \chi}{4\chi-5}$.

9. Να λύσετε τη εξίσωση : $\frac{\chi+1}{6} = \frac{3^{2009} + 3^{2010}}{3^{2008} + 3^{2009}}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4.3 Επίλυση προβλημάτων

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια των εξισώσεων ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

- 1^{ον} Προσδιορίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το εκφράζουμε με ένα γράμμα (χ,ψ,ω κ.α.) .
- 2^{ον} Εκφράζουμε τα στοιχεία του προβλήματος με την βοήθεια του αγνώστου .
- 3^{ον} Περιγράφουμε το πρόβλημα με μία εξίσωση.
- 4^{ον} Επιλύουμε την εξίσωση του προβλήματος.
- 5^{ον} Επαληθεύουμε τη λύση που βρήκαμε.

Παράδειγμα

1) Να βρείτε ένα αριθμό του οποίου το $\frac{1}{3}$ ελαττωμένο κατά 5 είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

Λύση

1^{ον} Έστω *α* το ζητούμενο αριθμός

$$2^{\text{ον}} \frac{1}{3} \cdot \chi - 5 = \frac{1}{2}$$

$$3^{\text{ον}} - 4^{\text{ον}} \frac{\chi}{3} - 5 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\chi}{3} = \frac{1}{2} + 5 \quad \text{ή} \quad \frac{\chi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{1} \quad \text{ή} \quad \frac{\chi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{10}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\chi}{3} = \frac{11}{2}$$

$$\text{ή} \quad \chi : 3 = \frac{11}{2} \quad \text{ή} \quad \chi = \frac{11}{2} \cdot 3 \quad \text{ή} \quad \chi = \frac{33}{2}$$

$$5^{\text{ον}} \text{Επαλήθευση} \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{33}{2} = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}, \quad \frac{11}{2} - 5 = \frac{11}{2} - \frac{10}{2} = \frac{1}{2}$$

Εργασία

1) Η Ελευθερία αγόρασε από ένα βιβλιοπωλείο βιβλία , τετράδια και στυλό και πλήρωσε 43 ευρώ. Αν τα βιβλία κοστίζουν τριπλάσια από τα στυλό και τα τετράδια διπλάσια από τα στυλό πόσο κοστίζουν τα βιβλία ;

Λύση

.....

.....

.....

.....

.....

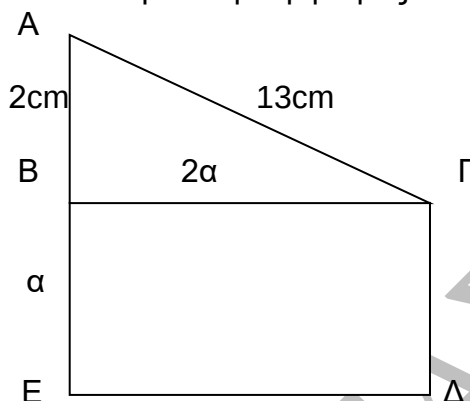
.....

.....

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2) Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τρίγωνο ABΓ και το ορθογώνιο BΓΔΕ. Αν η περίμετρος Π του τριγώνου είναι $\Pi = 35 \text{ cm}$. Να υπολογιστεί η περίμετρος Π' του BΓΔΕ.

Λύση



Ασκήσεις

1. Να διατυπώσετε τις παρακάτω προτάσεις με μαθηματικές εκφράσεις:

α) Το διπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 5.

β) Τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού αυξημένα κατά 2 κάνει $\frac{9}{2}$.

γ) Το τριπλάσιο ενός αριθμού είναι μικρότερο του 18.

2. Να διατυπώσετε με λόγια τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:

α) $5 \cdot \chi = 14$, β) $\chi + 7 = 0$, γ) $3 \cdot \chi - 2 = 4$, δ) $\chi + \psi = 7$, ε) $\chi - \psi = 10$, στ) $7 \leq \chi \leq 10$.

3. Να βρείτε ένα αριθμό που το τριπλάσιο του αυξημένο κατά 5 είναι ίσο με 23.

4. Πώς συμβολίζεται α) ένας άρτιος, β) ένας περιττός, γ) ο επόμενος ενός φυσικού, δ) ο προηγούμενος ενός φυσικού.

5. Αν το Ε.Κ.Π.(α,β) = β ποια σχέση συνδέει τα α,β. Δώστε παράδειγμα.

6. Αν το Ε.Κ.Π.(α,β) = α·β τι συμπεραίνετε για τους α,β. Δώστε παράδειγμα.

7. Να μοιραστεί το ποσό 26.100 ευρώ σε τρία άτομα έτσι ώστε ο Α να πάρει 4.500 ευρώ περισσότερα από το Β και ο Γ 2.100 ευρώ λιγότερα από το Β.

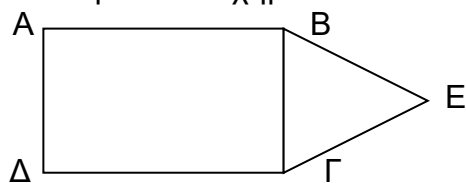
8. Για ένα τραπέζι και 4 καρέκλες πληρώσαμε 840 ευρώ. Το τραπέζι κοστίζει όσο 3 καρέκλες. Πόσα θα πληρώσουμε αν αγοράσουμε άλλες δυο καρέκλες.

9. Βρείτε την περίμετρο ορθογωνίου παραλληλογράμμου με εμβαδόν $\frac{52}{8} \text{ cm}^2$ και μια πλευρά $\frac{7}{4} \text{ cm}$.

10. Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 5 ώρες. Μια δεύτερη την αδειάζει σε 6 ώρες. Αν η δεξαμενή είναι άδεια και ανοίξουν και οι δυο μαζί βρύσες σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

11. Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και το $B\Gamma E$ ισόπλευρο.



A) Να εκφράσετε με τη βοήθεια του χ :

α) την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$

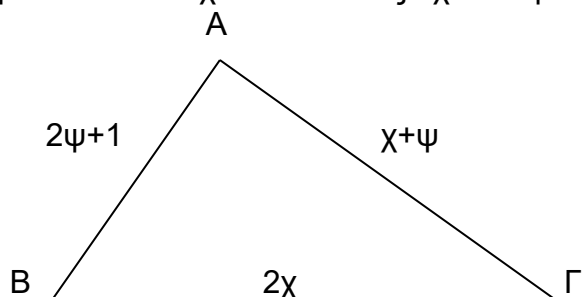
β) την περίμετρο του $B\Gamma E$

γ) την περίμετρο του $ABE\Gamma\Delta$

B) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του $ABE\Gamma\Delta$ για $\chi = 2$.

Γ) Για ποια τιμή του χ η περίμετρος του $ABE\Gamma\Delta$ είναι 27 ;

12. Αν η περίμετρος του παρακάτω σχήματος είναι 22 cm να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου που έχει διαστάσεις χ και ψ .



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 5^ο

5.1 Ποσοστά

Τι ονομάζουμε ποσοστό επί τοις εκατό ;

Το κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$ ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό και συμβολίζεται α%

$$\frac{\alpha}{100} = \alpha\%$$

➤ Το α% του β είναι $\frac{\alpha}{100} \cdot \beta$.

➤ Ένα κλάσμα μπορεί να γραφεί και ως ποσοστό και αντίστροφα ένα ποσοστό μπορεί να γραφεί ως κλάσμα.

Παραδείγματα

1) Να γράψετε ως ποσοστά τα κλάσματα α) $\frac{4}{5}$, β) $\frac{9}{8}$, και τους δεκαδικούς γ) 0,3 δ) 0,06

Λύση

$$\alpha) \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100} = 80\%, \beta) \frac{9}{8} = \frac{9 \cdot 12,5}{8 \cdot 12,5} = \frac{112,5}{100} = 112,5\%,$$

$$\gamma) 0,3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%, \delta) 0,06 = \frac{6}{100} = 6\%$$

2) Να υπολογίσετε το 15% των 600 ευρώ και το 25% της 1 ώρας.

Λύση

$$15\% \text{ των } 600 \text{ ευρώ είναι } \frac{15}{100} \cdot 600 = 6 \cdot 15 = 90 \text{ ευρώ.}$$

$$25\% \text{ της } 1 \text{ ώρας είναι } \frac{25}{100} \cdot 60 = \frac{25 \cdot 6}{10} = \frac{150}{10} = 15 \text{ min.}$$

Εργασία

Να μετατραπούν τα ποσοστά σε ανάγωγα κλάσματα : 35% και 120%.

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις

1. Να γράψετε ως ποσοστά τα παρακάτω κλάσματα α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{3}{4}$, γ) $\frac{13}{25}$, δ) $\frac{5}{8}$, ε) $\frac{13}{16}$.

2. Να μετατραπούν τα ποσοστά σε ανάγωγα κλάσματα : 20% , 75% , 45% , 140% .

3. Να υπολογίσετε α) το 13% του 40 , β) το 120% του 50.

4. Να βρείτε τι ποσοστό είναι : α) τα 20 ευρώ των 50 ευρώ , β) τα 18cm των 198cm.

5. Να μετατρέψετε τους δεκαδικούς σε κλάσματα: α) 0,15, β) 0,237, γ) 0,05, δ) 1,23.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

5.2 Προβλήματα με ποσοστά

Χρήσιμες σχέσεις :

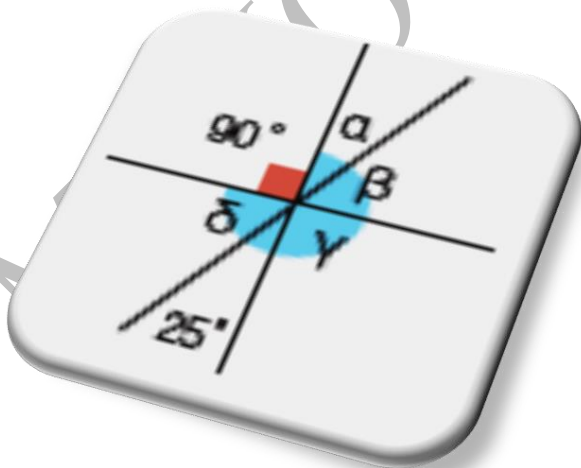
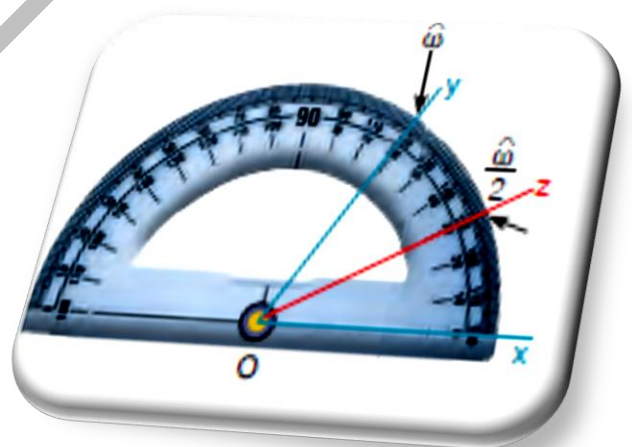
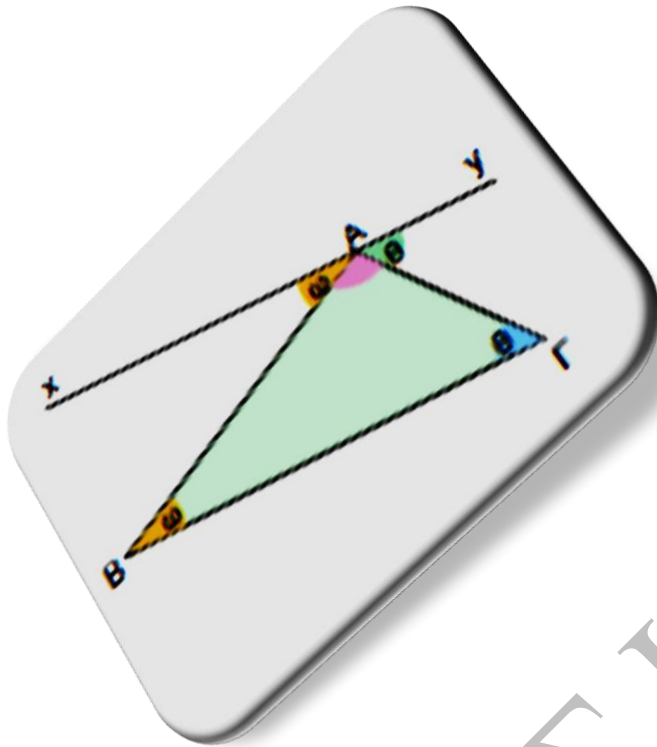
- Τόκος = Κεφάλαιο Επιτόκιο.
- Έκπτωση = Ποσοστό Τιμή.
- Τιμή μετά από την έκπτωση = Τιμή πριν την έκπτωση — Έκπτωση.
- Φ.Π. Α = Πόσο Ποσοστό.

Ασκήσεις

1. Η μέση τιμή πώλησης ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 15% και μετά από μια εβδομάδα μειώθηκε κατά 15%.Πότε συνέφερε να αγοράσουμε το προϊόν;
2. Η πλευρά ενός τετραγώνου αυξήθηκε κατά 30% .Πόσο αυξήθηκε σε ποσοστό η περίμετρος και το εμβαδόν του;
3. Σε 8 μήνες πήραμε τόκο 120.000 ευρώ από ένα κεφάλαιο με επιτόκιο 10%. Πόσο τόκο θα πάρουμε σε ένα χρόνο με το ίδιο επιτόκιο για το διπλάσιο κεφάλαιο;
4. Το 2001 ένας Η/Υ κόστιζε 1200 ευρώ .Το 2002 με την κυκλοφορία νέου μοντέλου η τιμή μειώθηκε κατά 25% .Το 2003 η τιμή του μειώθηκε πάλι κατά 20%.

Ποια η τιμή του 2003 ; Η συνολική μείωση είναι το άθροισμα των διαδοχικών μειώσεων δηλαδή το 45% της αρχικής ;
5. Η αξία ενός προϊόντος με Φ.Π.Α. (19%) είναι 952 ευρώ. Ποια είναι η αξία του προϊόντος χωρίς Φ.Π.Α.;
6. Ένα αυτοκίνητο στοιχίζει 24.000 ευρώ καινούργιο . Η αξία του μειώνεται κατά 12% κάθε χρόνο. Να βρείτε την αξία του αυτοκινήτου μετά από τρία χρόνια.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 1^ο

1.1 Σημείο– ευθύγραμμο τμήμα– ευθεία– ημιευθεία– επίπεδο ημιεπίπεδο

Τι ονομάζουμε σημείο και πώς το σημειώνουμε ;

Σημείο μπορούμε να πούμε ότι είναι το ίχνος που αφήνει η μύτη ενός μολυβιού , και το σημειώνουμε με μια τέλεια και ένα κεφάλαιο γράμμα π.χ Α.

Τι ονομάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ;

Αν έχουμε δυο διαφορετικά σημεία Α και Β και τα ενώσουμε , το επίπεδο σχήμα που φτιάχνουμε ονομάζεται ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα Α,Β.

Ποια ευθύγραμμα τμήματα ονομάζονται διαδοχικά ;

Δυο ευθύγραμμα τμήματα ονομάζονται διαδοχικά όταν έχουν κοινό άκρο.

Τι ονομάζουμε ευθεία ;

Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα προς τα δυο άκρα του προκύπτει ένα επίπεδο σχήμα το οποίο λέγεται ευθεία , τη συμβολίζουμε με ένα μικρό γράμμα π.χ. (ε), ή με δυο μικρά π.χ. $\chi\chi'$, $\psi\psi'$, ή με δυο κεφάλαια π.χ. ευθεία ΑΒ.

~~Χ~~ Από ένα σημείο διέρχονται **άπειρες** ευθείες.

~~Χ~~ Από δυο σημεία διέρχεται μια ευθεία.

~~Χ~~ Τρία σημεία ή και περισσότερα λέγονται συνευθειακά όταν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Τι ονομάζουμε ημιευθεία ;

Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα προς το ένα άκρο του προκύπτει ένα επίπεδο σχήμα το οποίο λέγεται ημιευθεία , η ημιευθεία έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος και το συμβολίζουμε με το γράμμα της αρχής και ένα μικρό π.χ. Αχ ή Αψ.

Ποιες ημιευθείες ονομάζουμε αντικείμενες ;

Αν Ο είναι ένα σημείο μιας ευθείας $\chi\chi'$ τότε ορίζονται δυο ημιευθείες με αρχή το Ο, οι Οχ και Οχ' οι οποίες λέγονται αντικείμενες ημιευθείες.

Τι είναι το επίπεδο ;

Επίπεδο είναι μια επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού μια ευθεία.

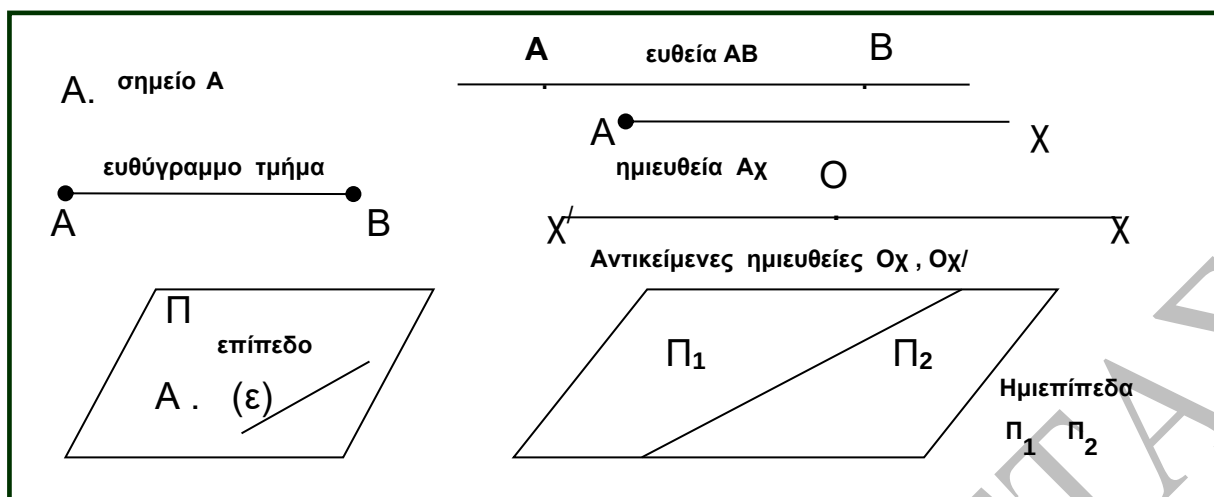
~~Χ~~ Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα επίπεδο.

~~Χ~~ Από δυο σημεία ή από ένα σημείο διέρχονται άπειρα επίπεδα.

Τι είναι το ημιεπίπεδο ;

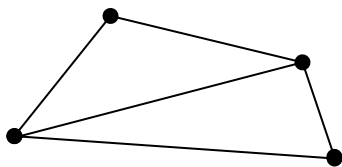
Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε επιφάνειες, η οποία κάθε μια λέγεται ημιεπίπεδο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

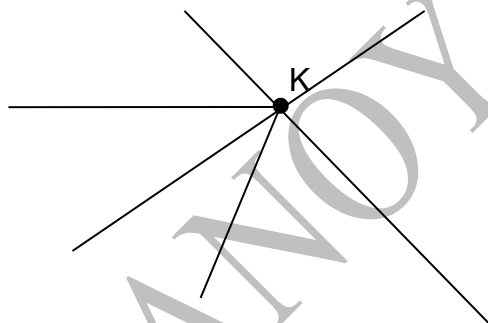


Ασκήσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα να ονομάσετε όλα τα σημεία και όλα τα ευθύγραμμα τμήματα



2. Πόσες ημιευθείες έχουν αρχή το Κ στο παρακάτω σχήμα, ποιες από αυτές είναι αντικείμενες; (Τοποθετήστε δικά σας γράμματα).

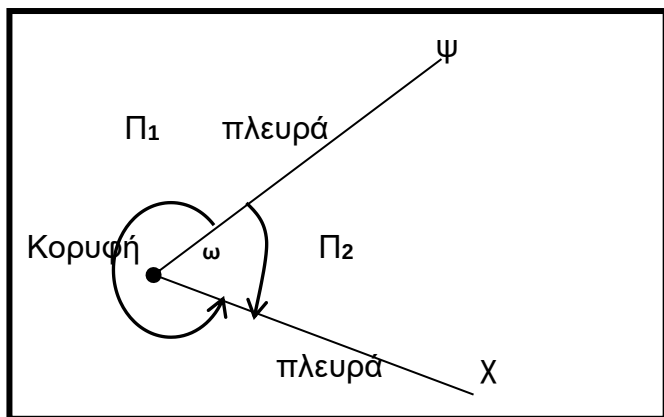


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.2 Γωνία – τεθλασμένη γραμμή – ευθύγραμμο σχήματα – ίσα σχήματα

Τι ονομάζουμε γωνία ;

Αν σχεδιάσουμε δυο ημιευθείες με κοινή αρχή ένα σημείο O τότε οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δυο περιοχές Π_1 , Π_2 . Κάθε μια από αυτές τις περιοχές μαζί με τις ημιευθείες λέγονται γωνίες με πλευρές τις ημιευθείες και κορυφή το σημείο O .



✎ Η μικρή Π_2 λέγεται κυρτή γωνία.

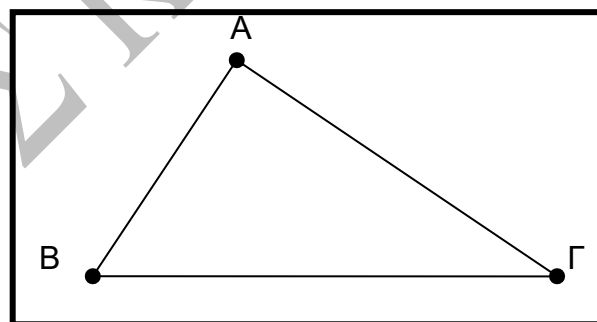
✎ Η μεγάλη Π_1 λέγεται μη κυρτή γωνία.

✎ Συμβολισμός $\hat{\omega}$ ή $\psi\hat{\chi}$

Γωνίες τριγώνου

✎ Η γωνία $\hat{A}$ λέμε ότι είναι η περιεχόμενη γωνία των πλευρών AB και AG , και η απέναντι γωνία από τη πλευρά $BΓ$.

✎ Ενώ οι $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ είναι οι προσκείμενες γωνίες τη πλευράς $BΓ$.



Τι ονομάζουμε τεθλασμένη γραμμή ;

Τεθλασμένη γραμμή είναι μια πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δεν βρίσκονται στη ίδια ευθεία.

✎ Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται κυρτή όταν η προέκταση κάθε πλευράς της, αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο όλες τις άλλες.

✎ Αν δεν είναι κυρτή λέγεται μη κυρτή.

Τι ονομάζουμε ευθύγραμμο σχήμα ;

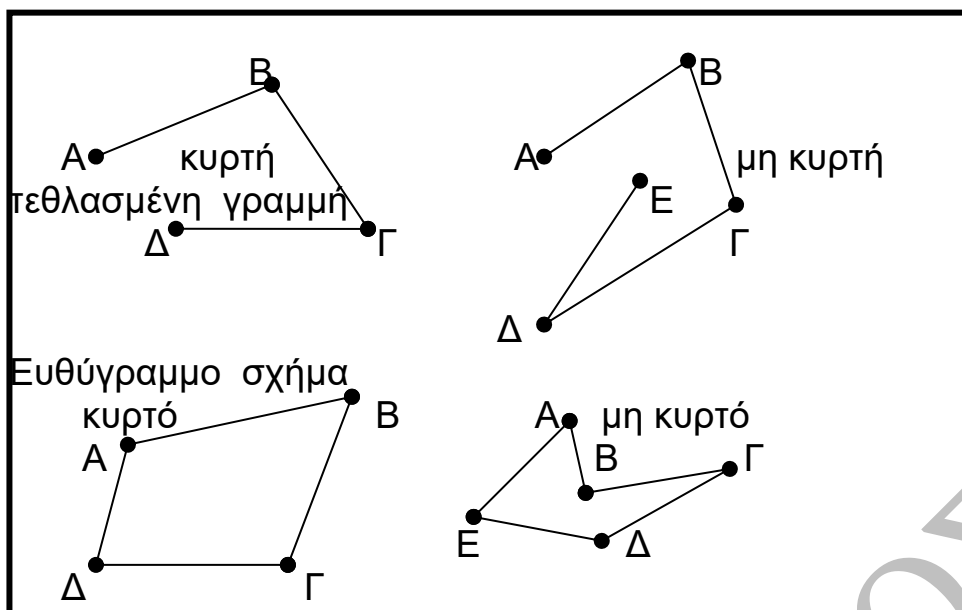
Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.

Ποια ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα ;

Δυο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα, αν συμπίπτουν όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.

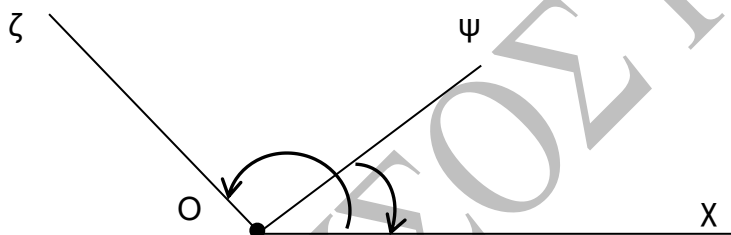
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σχήματα

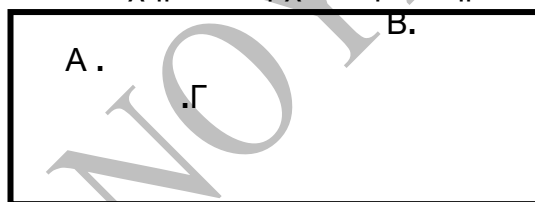


Ασκήσεις

1. Να ονομάσετε με τρία γράμματα τις γωνίες που είναι σημειωμένες

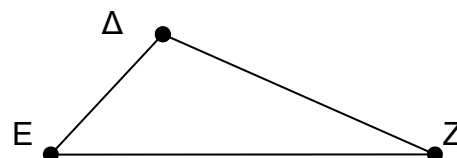


2. Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν τρία σημεία A, B, Γ να σχεδιαστεί η γωνία $B\hat{\Gamma}A$



3. Στο διπλανό τρίγωνο να βρείτε :

- την περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΔΕ και ΔΖ.
- τις προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΕΖ .
- την απέναντι γωνία της πλευράς ΔΖ .



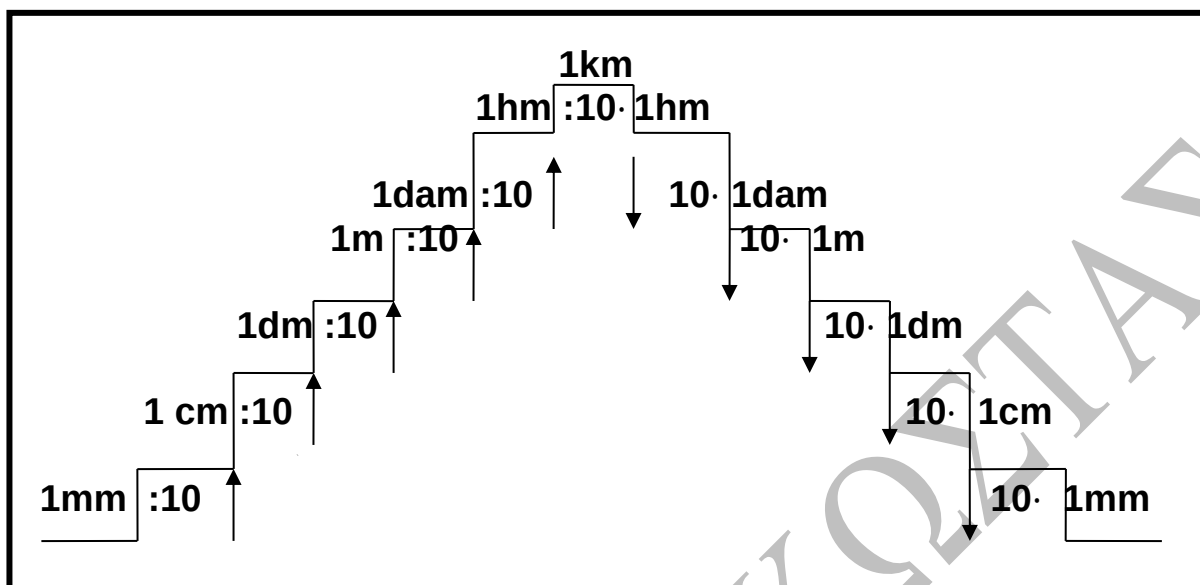
4. α) Να σχεδιαστεί μια κυρτή πολυγωνική γραμμή με 4 πλευρές :

- τα άκρα της να συμπίπτουν
 - τα άκρα της να μη συμπίπτουν
- β) να γίνει το ίδιο για μη κυρτή πολυγωνική γραμμή

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.3 Μέτρηση – σύγκριση – ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

► Μονάδα μέτρησης μήκους είναι το μέτρο (m)



Τι ονομάζουμε απόσταση δυο σημείων A και B ;

Απόσταση δυο σημείων A και B ονομάζουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος τα οποία τα συνδέει και το συμβολίζουμε (AB).

Τι ονομάζουμε μέσο ευθυγράμμου τμήματος ;

Μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζουμε το σημείο M του τμήματος το οποίο απέχει εξίσου από τα άκρα του, δηλαδή $MA = MB = \frac{AB}{2}$.

✎ Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μοναδικό μέσο.

✎ Για να συγκρίνουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιούμε το διαβήτη ή το υποδεκάμετρο (χάρακα).

Ασκήσεις

1. Σε ευθεία ε δίνονται με τη σειρά τα σημεία A, B, Γ, Δ, με $AB = ΓΔ$ και το μέσο του M του BΓ αποδείξτε ότι το M είναι μέσο του AΔ.

2. Σε ημιευθεία Oχ δίνονται τα σημεία A και B έτσι ώστε $OA = 3\text{cm}$ και $OB = 8\text{cm}$. Αν το σημείο M είναι μέσο του AB, να υπολογίσετε το μήκος του OM.

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λάθος :

A) Η απόσταση των σημείων A και B είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB

B) Αν $AB = 2 AM$ τότε το M είναι μέσο του AB.

Γ) Αν τα A, B, Γ βρίσκονται σε μια ευθεία ε και το σημείο B βρίσκεται μεταξύ των A και Γ τότε $AB < AΓ$.

A	B	Γ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

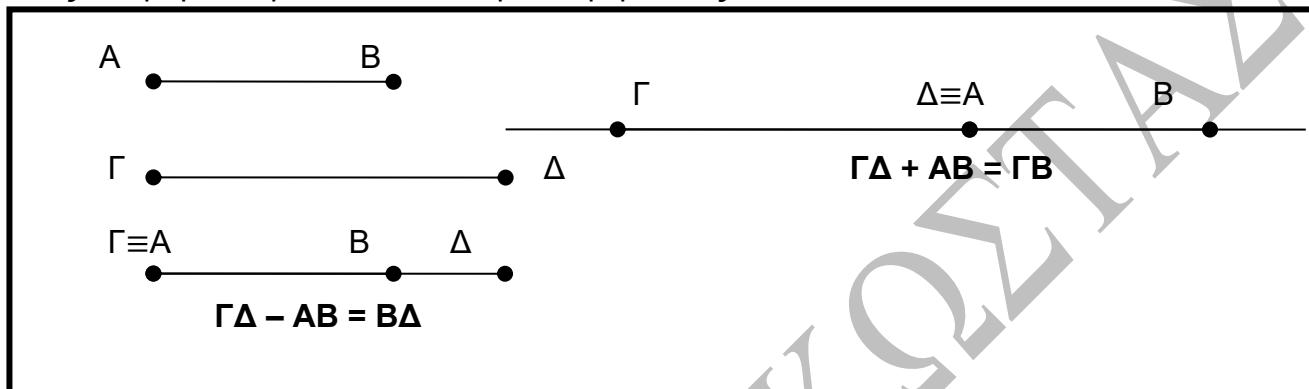
1.4 Πρόσθεση –Αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

Πώς προσθέτουμε ευθύγραμμα τμήματα :

Για να προσθέσουμε ευθύγραμμα τμήματα τα τοποθετούμε διαδοχικά πάνω σε μια ευθεία. Το τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμα τους.

Πώς αφαιρούμε δυο ευθύγραμμα τμήματα :

Για να αφαιρέσουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα τα τοποθετούμε το ένα πάνω στο άλλο με κοινή αρχή στην ίδια ευθεία. Το τμήμα που έχει αρχή το τέλος του μικρότερου και τέλος το τέλος του μεγαλύτερου αποτελεί την διαφορά τους.

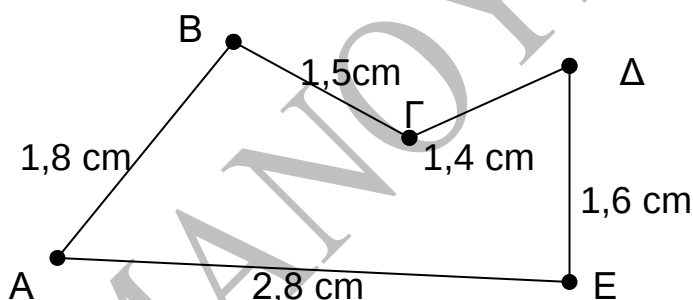


✗ Η τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων από τα αποτελείται.

✗ Περίμετρος ενός ευθυγράμμου σχήματος λέγεται το άθροισμα των μηκών των πλευρών του.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν σε cm και m : α) το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ABΓΔΕ, β) το μήκος του ευθυγράμμου σχήματος ABΓΔΕ.



2. Σε ημιευθεία Οχ δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ ώστε $OA = 2,5$ cm $OB = 4$ cm $OG = 5,5$ cm. Να υπολογιστούν τα μήκη ΑΒ ,ΑΓ , ΒΓ .

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = 3$ cm και $B\Gamma = 5$ cm. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά ΑΓ.

4. Σε μια ευθεία (ε) να πάρετε με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ώστε $AB = 2$ cm , $A\Gamma = \frac{3}{2} \cdot AB$ και $B\Delta = 2,5 AB$. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα να υπολογίσετε το μήκος του ΜΝ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

5. Σε μια ευθεία να πάρετε με τη σειρά τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε, ώστε το ΑΓ να είναι κατά 3 cm μεγαλύτερο του ΑΒ και το ΔΕ κατά 4cm μικρότερο του ΓΕ. Αν Κ και Λ μέσα των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ΚΛ.

1.5 Μέτρηση – σύγκριση – διχοτόμος γωνίας

Ποια η μονάδα μέτρησης των γωνιών και ποιες οι υποδιαιρέσεις τους;

Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η μοίρα που σημειώνεται 1° , υποδιαιρέσεις της μοίρας είναι το $1'$ (πρώτα λεπτό) και το $1''$ (δεύτερο λεπτό)

Δηλαδή $1^\circ = 60'$ $1' = 60''$

☒ Δυο αντικείμενες ημιευθείες σχηματίζουν γωνία η οποία έχει μέτρο 180° .

☒ Αν δυο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες.

☒ Σε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

Τι ονομάζουμε διχοτόμο μιας γωνίας;

Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δυο ίσες γωνίες.

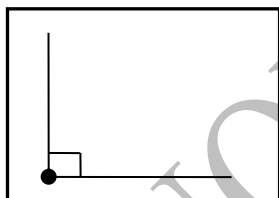
Ασκήσεις

1. Δίνεται η γωνία $\chi\hat{\theta}\psi = 80^\circ$ και η ημιευθεία Οζ στο εσωτερικό της $\chi\hat{\theta}\psi$ ώστε $\chi\hat{\theta}\zeta = 40^\circ$. Πως ονομάζεται η Οζ σχεδιάστε την Οζ.

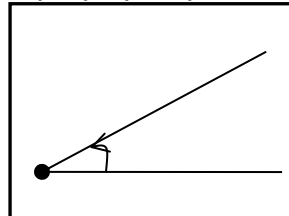
2. Σχεδιάστε τις γωνίες και τις διχοτόμους των 40° , 98° , 140° .

1.6 Είδη γωνιών – κάθετες ευθείες

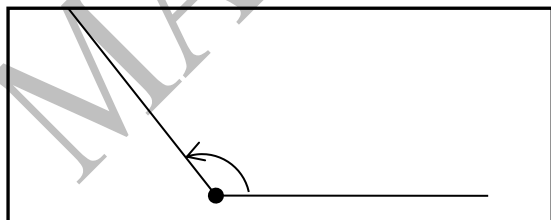
1. Ορθή γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι 90°



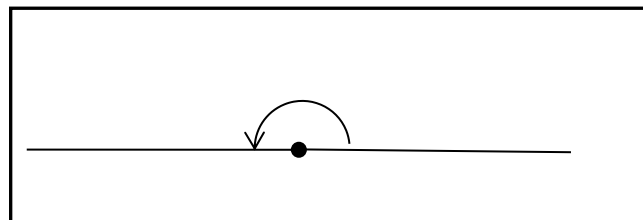
2. Οξεία γωνία λέγεται η γωνία με μέτρο μικρότερο των 90°



3. Αμβλεία γωνία λέγεται η γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° .

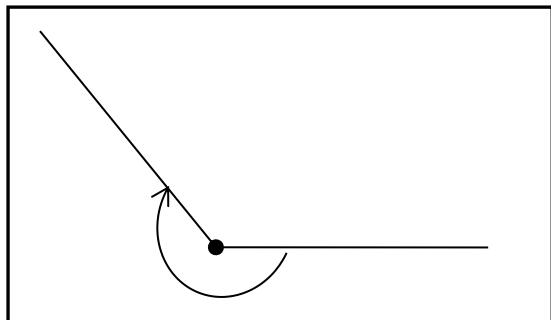


4. Ευθεία γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι με 180°

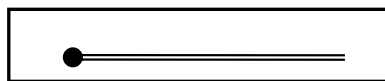


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

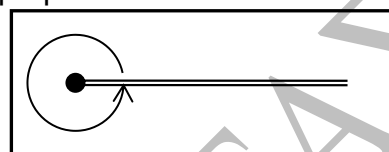
5. Μη κυρτή γωνία λέγεται η γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360° .



6. Μηδενική γωνία λέγεται η γωνία με μέτρο ίσο με 0°



7. Πλήρης γωνία λέγεται η γωνία με μέτρο με 360°



✗ Κάθε γωνία με μέτρο από 0° μέχρι 180° λέγεται κυρτή.

✗ Όταν δυο ευθείες τεμνόμενες σχηματίζουν γωνίες ορθές τότε λέμε ότι οι ευθείες αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους και το δηλώνουμε με το σύμβολο $\perp$, δηλαδή όταν έχουμε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ κάθετες μπορούμε να το σημειώσουμε ως εξής $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Ασκήσεις

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία της στήλης Α με το χαρακτηρισμό της στήλης Β.

<u>Στήλη Α</u>	<u>Στήλη Β</u>
α) 70°	1) ευθεία γωνία
β) 213°	2) αμβλεία γωνία
γ) 147°	3) οξεία γωνία
δ) 180°	4) μη κυρτή γωνία

α	
β	
γ	
δ	

2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με την γωνία $\Gamma = 140^\circ$. Να φέρετε τις κάθετες από τα σημεία Α, Β στις ευθείες ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

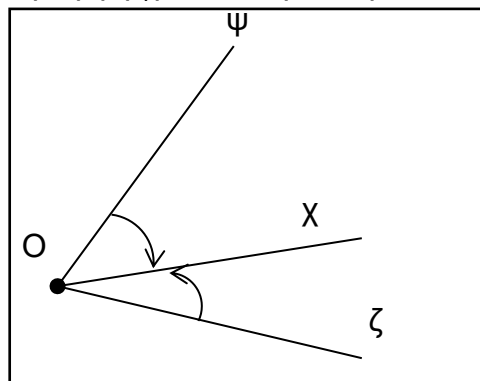
1.7 Εφεξής – Διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα

Ποιες γωνίες λέγονται εφεξής:

Δυο γωνίες λέγονται εφεξής όταν έχουν : α) κοινή κορυφή β) μια κοινή πλευρά, και γ) κανένα άλλο κοινό σημείο.

Εφεξής γωνίες είναι οι γωνίες : $\chi\hat{O}\psi$ και $\chi\hat{O}\zeta$ (κοινή κορυφή το Ο, κοινή πλευρά Οχ, κανένα άλλο κοινό σημείο).

Εφεξής γωνίες δεν είναι οι γωνίες : $\chi\hat{O}\zeta$ και $\psi\hat{O}\zeta$



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ποιες γωνίες λέγονται διαδοχικές;

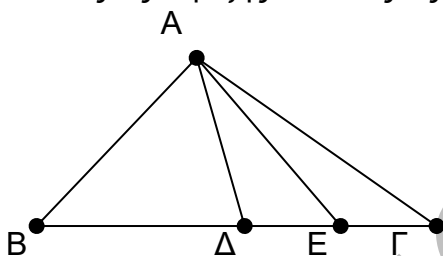
Διαδοχικές γωνίες λέγονται δυο ή περισσότερες γωνίες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής με την γωνία με την προηγούμενη της ή την επόμενη της.

Πώς προσθέτουμε δυο γωνίες;

Για να προσθέσουμε δυο γωνίες τις μεταφέρουμε ώστε να γίνουν εφεξής και το άθροισμα τους είναι μια γωνία η οποία έχει για πλευρές τις πλευρές των αρχικών γωνιών εκτός από την κοινή τους όταν τις κάναμε εφεξής.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε και να ονομάσετε όλες τις εφεξής και όλες τις διαδοχικές γωνίες του παρακάτω σχήματος



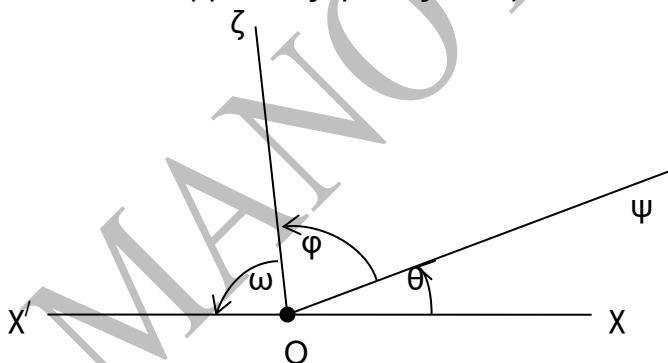
2. Βρείτε το άθροισμα δυο γωνιών με μέτρα 37° και 53° αφού τις κάνετε εφεξής.

3. Βρείτε το άθροισμα τριών γωνιών με μέτρα 43° και 78° και 55° αφού τις κάνετε εφεξής.

4. Δίνονται δυο εφεξής γωνίες $\chi\hat{\theta}\psi = 30^\circ$ και $\psi\hat{\theta}\zeta = 50^\circ$ και οι διχοτόμοι τους $Οδ_1$, $Οδ_2$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την γωνία $\delta_1\hat{\theta}\delta_2$ και στην συνέχεια να συγκριθεί με την $\chi\hat{\theta}\zeta$.

5. Να κατασκευασθεί γωνία 240° .

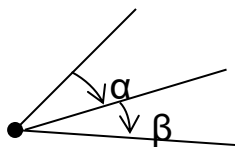
6. Αν τα μέτρα των γωνιών $\hat{\theta}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$ του παρακάτω σχήματος είναι ανάλογα με των αριθμών 2, 3, 4 να βρείτε τις γωνίες $\hat{\theta}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\phi}$



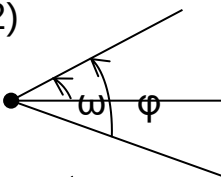
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

7. Ποιες από τις παρακάτω σημειωμένες γωνίες είναι εφεξής σε κάθε περίπτωση ;

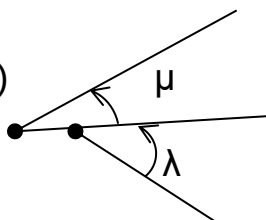
1)



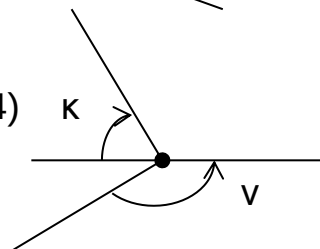
2)



3)



4)



1.8 Παραπληρωματικές– Συμπληρωματικές– Κατακορυφήν γωνίες

Ποιες γωνίες λέγονται παραπληρωματικές ;

Παραπληρωματικές λέγονται δυο γωνίες οι οποίες έχουν άθροισμα 180° .

Ποιες γωνίες λέγονται συμπληρωματικές ;

Συμπληρωματικές λέγονται δυο γωνίες οι οποίες έχουν άθροισμα 90° .

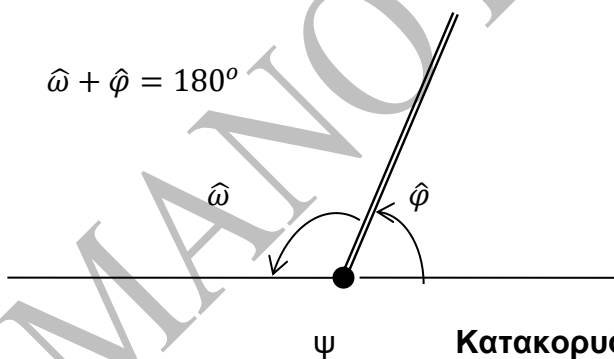
Ποιες γωνίες λέγονται κατακορυφήν ;

Κατακορυφήν ονομάζονται δυο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Δυο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

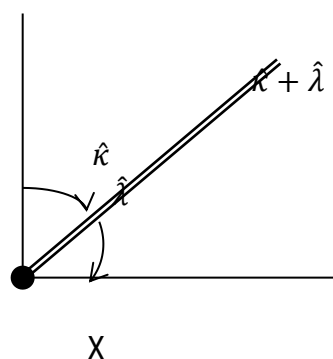
Παραπληρωματικές γωνίες

$$\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ$$

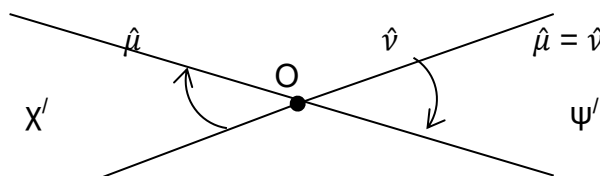


Συμπληρωματικές γωνίες

$$\hat{\kappa} + \hat{\lambda} = 90^\circ$$



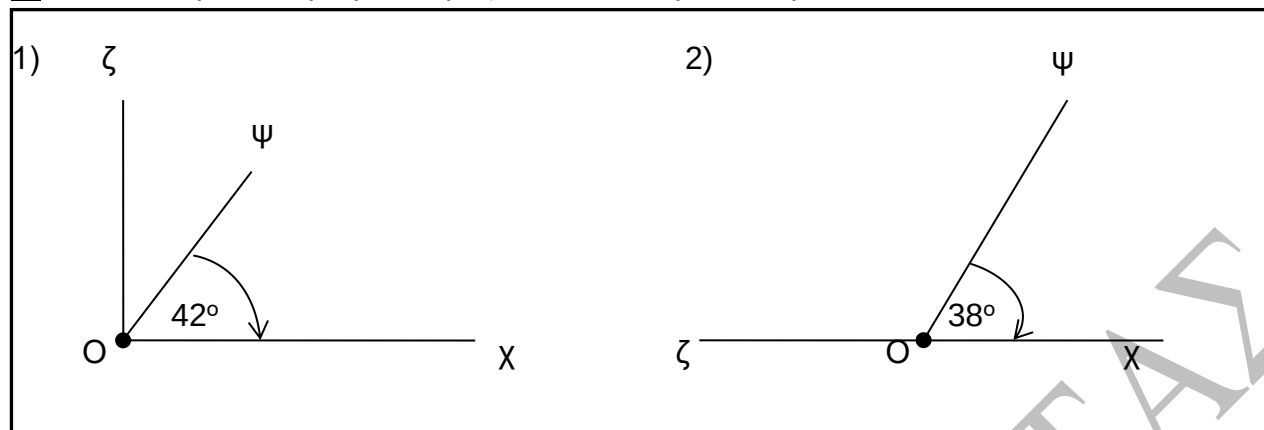
Κατακορυφήν γωνίες



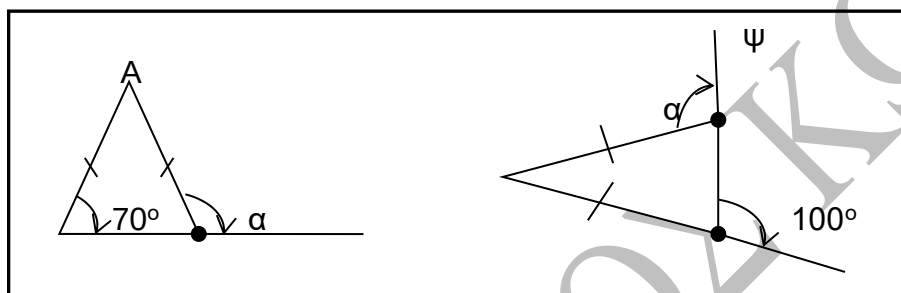
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

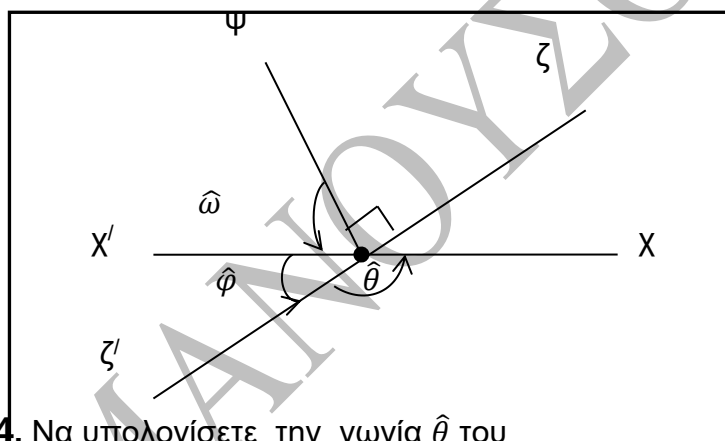
1. Να υπολογίσετε την γωνία $\psi\hat{O}\zeta$ σε κάθε περίπτωση



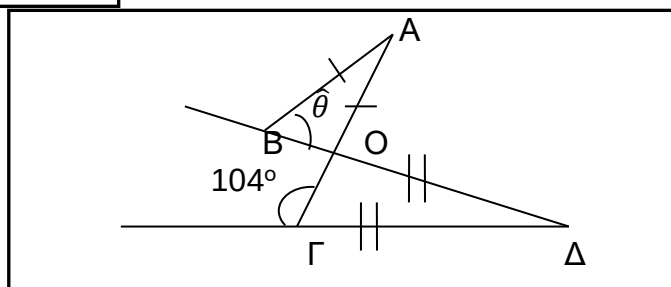
2. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\alpha}$ στα παρακάτω σχήματα (τα τρίγωνα είναι ισοσκελή)



3. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\phi}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\theta}$ του παρακάτω σχήματος



4. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\theta}$ του διπλανού σχήματος .



5. Υπολογίστε δυο γωνίες αν είναι παραπληρωματικές και η μια είναι τριπλάσια της άλλης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

6. Έστω δυο ευθείες $\chi\chi'$ και $\psi\psi'$ οι οποίες τέμνονται, και η μια είναι από τις τέσσερις γωνίες είναι διπλάσια της άλλης να υπολογιστούν όλες οι γωνίες.

7. Αν μια γωνία είναι 24° μεγαλύτερη από την παραπληρωματική της υπολογίστε πόσες μοίρες είναι.

8. Σχεδιάστε μια γωνία 135° και την κατακορυφήν της. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι τους.

1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

Ποιες ευθείες λέγονται παράλληλες;

Παράλληλες λέγονται δυο ευθείες του ίδιου επιπέδου οι οποίες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Ποιες ευθείες λέγονται τεμνόμενες;

Τεμνόμενες λέγονται δυο ευθείες του ίδιου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο.

Ποιες οι θέσεις δυο ευθειών στο επίπεδο;

Δυο ευθείες του ίδιου επιπέδου ή θα τέμνονται ή θα είναι μεταξύ τους παράλληλες

➤ Αν δυο ευθείες ϵ_1 ϵ_2 είναι :

✗ Παράλληλες γράφουμε $\epsilon_1 // \epsilon_2$.

✗ Κάθετες γράφουμε $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$.

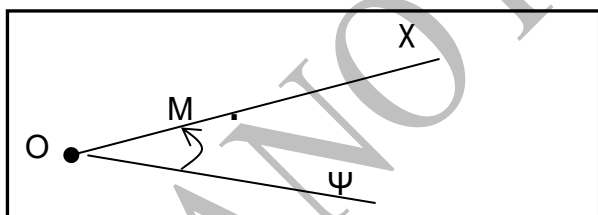
➤ Δυο ευθείες κάθετες σε μια τρίτη είναι μεταξύ τους παράλληλες δηλαδή :

$\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ και $\epsilon_1 \perp \epsilon_3$ τότε $\epsilon_2 // \epsilon_3$.

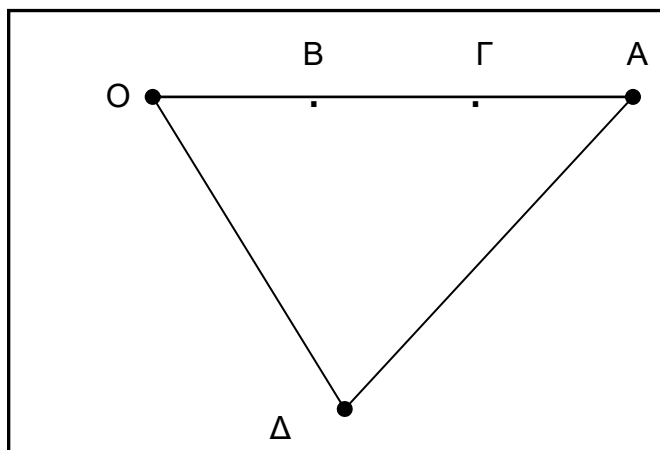
➤ Από ένα σημείο A, εκτός ευθείας ϵ διέρχεται μια και μοναδική ευθεία ϵ_1 παράλληλη στην ϵ .

Ασκήσεις

1. Από το σημείο M να φέρετε παράλληλες στις πλευρές της γωνίας $\chi\theta\psi$

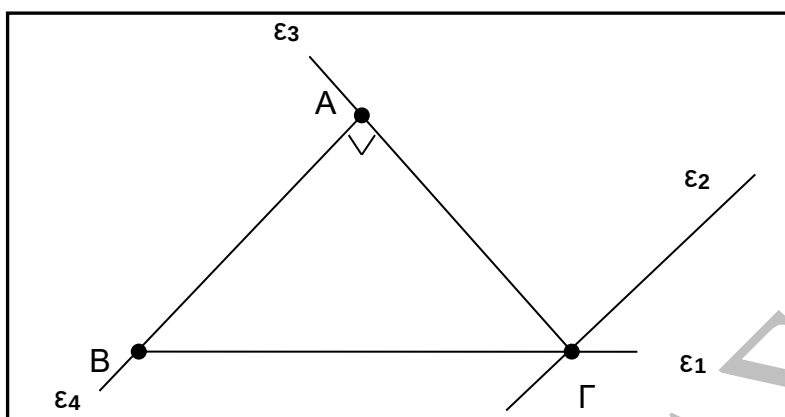


2. Στο διπλανό σχήμα να σημειώσετε τα σημεία E και Z στο τμήμα OΔ ώστε $BE // AD$ και $GZ // BE$



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- 3.** Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις ευθείες που :
- α) τέμνονται ανά δυο
 - β) είναι παράλληλες



- 4.** Να χαράξετε τρεις ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 ώστε
- A) να μην έχουν κοινό σημείο
 - B) να τέμνονται ανά δυο
 - Γ) να έχουν κοινό σημείο

1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

Τι ονομάζουμε απόσταση δυο σημείων A και B;

Απόσταση σημείου A από σημείο B ονομάζουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

Τι ονομάζουμε απόσταση σημείου A από ευθεία ε;

Απόσταση σημείου A από ευθεία ε, είναι το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος AA_0 , από το σημείο A προς την ευθεία ε, όπου A_0 είναι σημείο της ευθείας ε.

Τι ονομάζουμε απόσταση δυο παραλλήλων ευθειών;

Απόσταση δυο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δυο παράλληλες και έχει τα άκρα του σε αυτές.

Ασκήσεις

- 1.** Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο και να φέρετε τις κάθετες πάνω στις πλευρές τους στα μέσα αυτών τι παρατηρείτε ;
- 2.** Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και ΟΖ η διχοτόμος της, αν Μ σημείο της ΟΖ να φέρετε τις αποστάσεις του Μ από τις Οχ και Οψ τι παρατηρείτε ;
- 3.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και δυο σημεία που δεν ανήκουν στο AB τέτοια ώστε $MA=MB$ και $NA=NB$. Αν η ευθεία MN τέμνει την AB στο Ο να εξετάσετε :
- α) Με τον γνώμονα αν $MN \perp AB$
 - β) Με το διαβήτη αν το Ο είναι το μέσο του AB
 - γ) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο της MN να συγκρίνετε με το υποδεκάμετρο τα ΚΑ, ΚΒ.
- 4.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma = 3,3\text{cm}$ και ευθεία ε όχι παράλληλη προς τη ΒΓ. Να σχεδιάσετε τρίγωνο ΑΒΓ που να έχει κορυφή Α πάνω στην ε και το ύψος $AD = 2,9\text{ cm}$.
- 5.** Δίνονται δυο τεμνόμενες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 :
- A) Να βρείτε τα σημεία της μια που απέχουν από την άλλη 2 cm.
 - B) Να ενώσετε τα σημεία που βρίσκονται στο ερώτημα (α) τι σχήμα κατασκευάζεται ;

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

Τι ονομάζουμε κύκλο ;

Κύκλο (κέντρου O και ακτίνας ρ) λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο O .

- ☒ Η απόσταση ρ λέγεται ακτίνα του κύκλου .
- ☒ Το σημείο O λέγεται κέντρο του κύκλου .
- ☒ Δυο κύκλοι με ίσες ακτίνες είναι ίσοι .

Τι ονομάζουμε χορδή του κύκλου ;

Χορδή του κύκλου ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο σημεία του κύκλου.

Τι ονομάζουμε διάμετρο του κύκλου ;

Διάμετρος του κύκλου ονομάζεται η χορδή η οποία διέρχεται από το κέντρο του .

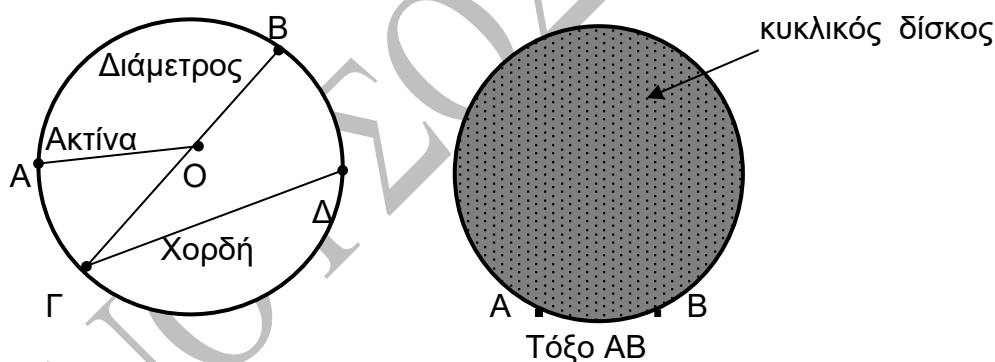
- ☒ Η διάμετρος είναι ίση με δυο ακτίνες του κύκλου και χωρίζει το κύκλο σε δυο ίσα μέρη που λέγονται ημικύκλια.

Τι ονομάζουμε τόξο ενός κύκλου ;

Τόξο ενός κύκλου ονομάζουμε καθένα από τα δυο μέρη μεταξύ δυο σημείων του .

Τι ονομάζουμε κυκλικό δίσκο ;

Κυκλικός δίσκος (O, ρ) είναι ο κύκλος (O, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει .



Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο διαμέτρου : α) $d = 8 \text{ cm}$, $d = 3,6 \text{ cm}$.
2. Σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα $BF = 5 \text{ cm}$ και βρείτε τα σημεία του επιπέδου τα οποία απέχουν : α) από το B 3 cm β) από το Γ 4 cm γ) από το B 3 cm και από το Γ 4 cm .
3. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 4 \text{ cm}$ και οι κύκλοι $(A, 2 \text{ cm})$ $(B, 3 \text{ cm})$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το A απόσταση μεγαλύτερη από 2 cm και από το B απόσταση μικρότερη ή ίση από 3 cm .
4. Να κατασκευάσετε τρίγωνο με πλευρές $AB = 2,5 \text{ cm}$ $BF = 4 \text{ cm}$ $AF = 3,5 \text{ cm}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- 5.** Δίνεται κύκλος (Ο, 4 cm) και ένα σημείο του Α. α) Να βρείτε δυο σημεία Β, Γ του κύκλου που να απέχουν 2 cm από το Α και αλλά δυο σημεία Β', Γ' που να απέχουν 3,5 cm από το Α.
β) Να συγκριθούν οι χορδές ΓΓ' με ΒΒ' και ΓΒ' με Γ'Β.

1.12 Επίκεντρη γωνία - σχέση επίκεντρης και αντίστοιχου τόξου

Ποια γωνία ονομάζουμε επίκεντρη;

Επίκεντρη γωνία σε κύκλο (Ο, ρ) ονομάζουμε τη γωνία που η κορυφή της συμπίπτει με το κέντρο Ο του κύκλου.

- ✎ Οι πλευρές μιας επίκεντρης γωνίας $\chi\hat{O}\psi$, Οχ και Οψ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, το τόξο ΑΒ λέγεται αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας.
- ✎ Σε ένα κύκλο ή σε ίσους κύκλους δυο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα.
- ✎ Σε ένα κύκλο ή σε ίσους κύκλους δυο ίσα τόξα έχουν ίσες επίκεντρες γωνίες.
- ✎ Το μέτρο ενός τόξου είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

Ασκήσεις

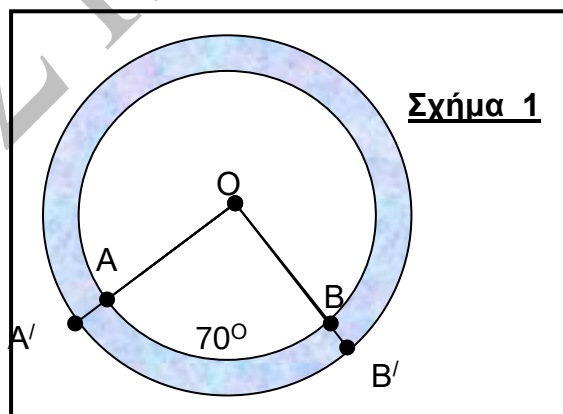
- 1.** Δυο διάμετροι σε ένα κύκλο σχηματίζουν γωνία 30° . Να βρείτε πόσες μοίρες είναι το καθένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από τις διαμέτρους.

- 2.** Το διπλανό σχήμα το τόξο ΑΒ είναι 70° .

- Α) Πόσων μοιρών είναι το τόξο Α'Β' και γιατί;
Β) Είναι τα τόξα ΑΒ και Α'Β' ίσα; (Σχήμα 1)

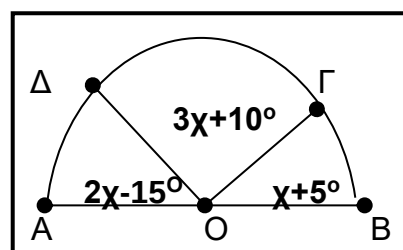
- 3.** Δίνεται κύκλος (Ο, 3 cm) και ένα σημείο του Α. Γράφουμε κύκλο (Α, 2 cm) που τέμνει τον πρώτο στα σημεία Β, Γ. Να εξηγήσετε γιατί $\widehat{AOB} = \widehat{AOG}$.

- 4.** Να σχεδιάσετε μια ορθή γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και να πάρετε σημείο Α της Οχ ώστε $OA = 1,5$ cm.
Να βρείτε σημείο Β της Οψ ώστε $AB = 3$ cm.
Να μετρήσετε την γωνία Β του τριγώνου.



Σχήμα 1

- 5.** Να υπολογίσετε ποσό μοιρών είναι καθένα από τα τόξα ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

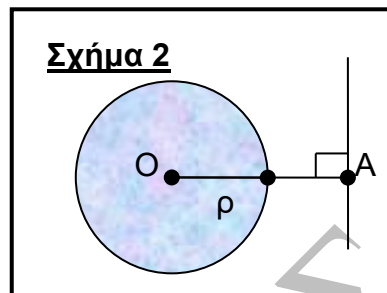
1.13 Θέσεις ευθείας και κύκλου

Ποιες οι θέσεις ευθείας και κύκλου;

1) Η ευθεία και ο κύκλος να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. Τότε λέμε ότι η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου.

Η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα $OA > \rho$ (Σχήμα 2).

Σχήμα 2



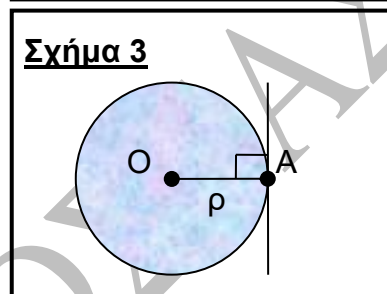
2) Η ευθεία και ο κύκλος να έχουν ένα κοινό σημείο.

Το σημείο αυτό λέγεται σημείο επαφής

και η ευθεία εφαπτομένη του κύκλου.

Η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα $OA = \rho$ (Σχήμα 3).

Σχήμα 3

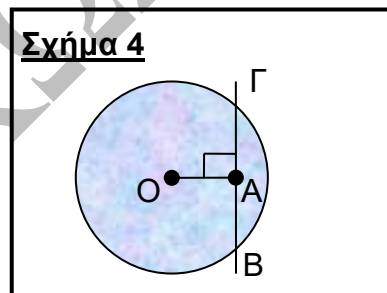


3) Η ευθεία και ο κύκλος να έχουν δύο κοινά σημεία.

Τότε η ευθεία αυτή ονομάζεται τέμνουσα του κύκλου.

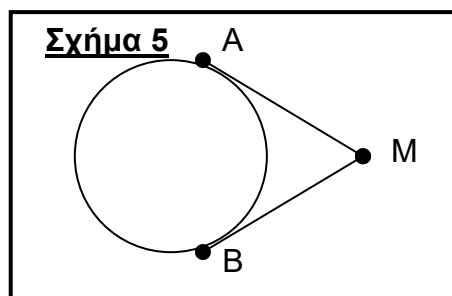
Η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μικρότερη από την ακτίνα $OA < \rho$ (Σχήμα 4).

Σχήμα 4



Αν M είναι το σημείο τομής των εφαπτόμενων ενός κύκλου στα σημεία A και B τα τμήματα MA και MB λέγονται εφαπτόμενα και είναι ίσα μεταξύ τους (Σχήμα 5).

Σχήμα 5



Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε δυο παράλληλες ευθείες ϵ_1, ϵ_2 που να απέχουν 2,5 cm και να πάρετε ένα σημείο M στην ϵ_1 . Να βρείτε τα σημεία της ϵ_2 που απέχουν από το M 3cm.

2. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο με κέντρο O και να φέρετε δυο κάθετες ακτίνες OA και OB. Αν η ευθεία ϵ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο A, να δικαιολογήσετε γιατί η ϵ είναι παράλληλη στην OB.

3. Βρείτε πόσοι κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο K με ακτίνα 4cm. Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4. Σχεδιάστε ένα κύκλο κέντρου O πάρτε ένα σημείο A εκτός του κύκλου. Χαράξτε τον κύκλο (A, OA) και έστω B το σημείο τομής του (A, OA) και της OA αν Γ, Δ τα σημεία τομής των δυο κύκλων. Φέρτε τις ευθείες $B\Gamma$ και $B\Delta$. Τι παρατηρείτε ;

5. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 5 \text{ cm}$ ύψος $AD = 3 \text{ cm}$ και $AB = 3,5 \text{ cm}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 2^ο

2.1 Συμμετρία ως προς άξονα

Ποιο σημείο ονομάζουμε συμμετρικό ενός σημείου A ως προς μια ευθεία ϵ ;

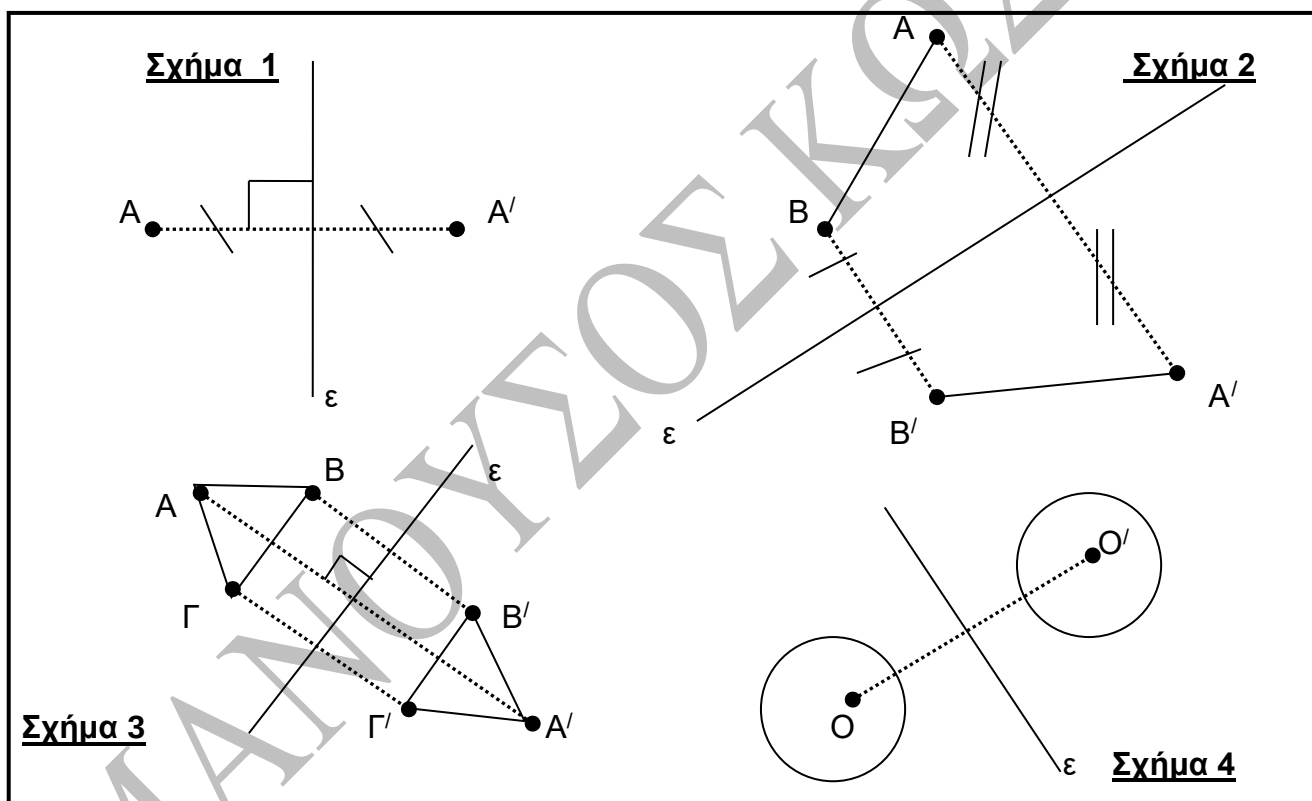
Συμμετρικό ενός σημείου A ως προς μια ευθεία ϵ ονομάζουμε το σημείο A' με το οποίο συμπίπτει το α αν «διπλώσουμε» το επίπεδο κατά μήκος της ευθείας ϵ . Τα σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ϵ (Σχήμα 1).

☞ Κάθε σημείο της ευθείας ϵ είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ϵ .

Ποια σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία ϵ ;

Δυο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται συμμετρικά ως προς μια ευθεία ϵ όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ευθεία ϵ .

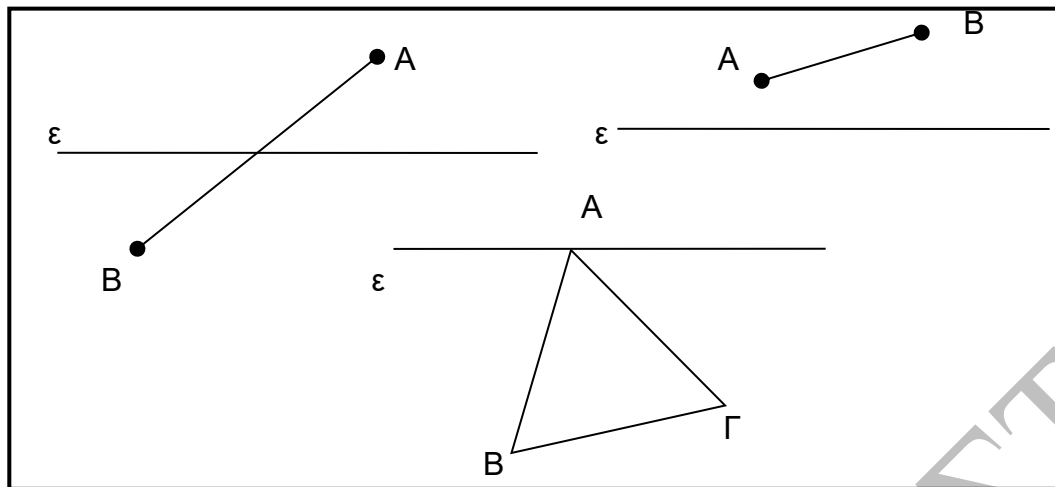
☞ Τα συμμετρικά ως προς την ευθεία ϵ σχήματα είναι ίσα (Σχήματα 2,3,4)



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να κατασκευαστούν τα συμμετρικά των παρακάτω σχημάτων ως προς την ευθεία ε



2. Σε κύκλο $(O, 2\text{cm})$ πάρτε τρία σημεία A, B, Γ . Φέρτε μια ευθεία που να περνάει από το κέντρο και να μην περιέχει τα σημεία A, B, Γ . Χρησιμοποιώντας μόνο διαβήτη να σχεδιάσετε το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία ε .

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έστω AM η διάμεσός του. Κατασκευάστε το συμμετρικό του $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία AM . Είναι η AM διάμεσος του καινούργιου τριγώνου;

4. Πάρτε ένα σημείο A στην πλευρά $O\chi$ μιας γωνίας $\chi\hat{O}\psi$. Αν A' το συμμετρικό του A ως προς την $O\psi$. Είναι η $O\psi$ διχοτόμος της AA' ;

2.2 Άξονας συμμετρίας

Τι ονομάζεται Άξονας συμμετρίας ενός σχήματος

Άξονας συμμετρίας σχήματος, ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δυο ίσα σχήματα τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας αυτής.

- ☒ Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.
- ☒ Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.
- ☒ Η διάμετρος ενός κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.
- ☒ Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου.

Άσκηση

1. Να σχεδιαστούν οι άξονες συμμετρίας $AB\Gamma$.

- A) Ενός ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$.
- B) Ενός ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.
- Γ) Ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- Δ) Ενός ρόμβου $AB\Gamma\Delta$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

Τι ονομάζουμε μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος;

Μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

Ιδιότητα μεσοκαθέτου

✎ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αντίστροφα

✎ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό του.

✎ Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι άξονας συμμετρίας του .

Ασκήσεις

1. Ο Ηλίας, ο Γιώργος και η Μάρθα μένουν στα σπίτια Α, Β, Γ αντιστοίχως και το σχολείο ισαπέχει από όλα τα σπίτια. Βρείτε την θέση του σχολείου.
2. Με αρχή το Ο σημείο της ευθείας ϵ γράψτε ημιευθεία $O\chi$ η οποία δεν περιέχεται και δεν είναι κάθετη στην ϵ . Πάρτε δυο σημεία Α και Β της $O\chi$ και να βρείτε ένα σημείο που να ισαπέχει από τα Α και Β.
3. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$) γράψτε τους κύκλους που έχουν διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Φέρτε την κοινή χορδή τους και βρείτε εάν αυτή είναι μεσοκάθετη της ΒΓ.
4. Σχεδιάστε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και την ευθεία ϵ που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη ΒΓ. Βρείτε το σημείο Μ της ϵ που ισαπέχει από τις κορυφές Β και Γ.
5. Σχεδιάστε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο οποίο $AB=AD$ και $B\Gamma=\Gamma\Delta$. Να δικαιολογήσετε γιατί η διαγώνιος ΑΓ είναι μεσοκάθετος της ΒΔ ;
6. Να κατασκευάσετε την κάθετη ευθεία ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ στο άκρο του Β (με χάρακα και διαβήτη)
7. Να κατασκευάσετε τον κύκλο που διέρχεται από τις κορυφές :
Α) οξυγωνίου τριγώνου.
Β) ορθογωνίου τριγώνου.
8. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Γράφουμε τον κύκλο (Α,ΑΒ) που τέμνει τον κύκλο Ο στο Γ. Εξηγήστε γιατί η ΑΟ είναι μεσοκάθετη της ΒΓ .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2.4 Συμμετρία ως προς κέντρο Ο

Τι ονομάζουμε συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς κέντρο Ο:

Συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς κέντρο Ο είναι το σημείο Α', με το οποίο συμπίπτει το Α, αν περιστραφεί περὶ το Ο κατὰ 180° .

Τα σημεία Α, Α' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο Ο.

- ☒ Δυο σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς σημείο Ο αν το Ο είναι μέσο του ΜΜ'.
- ☒ Δυο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου.
- ☒ Τα συμμετρικά σημεία ως προς κέντρο Ο είναι ίσα σχήματα.

Άσκηση

- 1.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Αν Δ είναι το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο το Α και Ε είναι το συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία ΑΒ να δείξετε ότι το ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

2.5 Κέντρο συμμετρίας σχήματος

Τι ονομάζουμε κέντρο συμμετρίας σχήματος:

Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο Ο γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατὰ 180° , συμπίπτει με το αρχικό σχήμα.

- ☒ Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σημείο.
- ☒ Το κέντρο του κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του.
- ☒ Το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Ασκήσεις

- 1.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ συμμετρικό του Β ως προς την κορυφή Α και το Ε συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία ΑΓ. Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές;
- 2.** Εξετάστε αν έχουν κέντρο συμμετρίας δυο κατακορυφές γωνίες.

2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

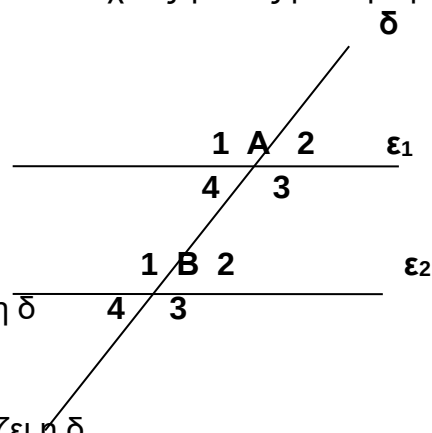
Αν δυο ευθείες παράλληλες ϵ_1/ϵ_2 τέμνονται από μια άλλη ευθεία δ στα σημεία Α και Β τότε σχηματίζονται 4 διαδοχικές γωνίες με κορυφή το Α και 4 διαδοχικές γωνίες με κορυφή το Β.

☒ Οι γωνίες μεταξύ των παραλλήλων ονομάζονται **εντός**
 $\hat{A}_3, \hat{B}_1, \hat{A}_4, \hat{B}_2$

☒ Οι γωνίες που δεν είναι ανάμεσα στις παράλληλες ονομάζονται **εκτός** $\hat{A}_1, \hat{B}_4$ ή $\hat{A}_2, \hat{B}_3$

☒ Οι γωνίες που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η δ ονομάζονται **επί τα αυτά** $\hat{A}_2, \hat{B}_3, \hat{A}_3, \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_1, \hat{B}_4, \hat{A}_4, \hat{B}_1$

☒ Οι γωνίες που δεν βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η δ ονομάζονται **εναλλάξ** $\hat{A}_3, \hat{B}_1$ ή $\hat{A}_4, \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2, \hat{B}_4$ ή $\hat{A}_1, \hat{B}_3$



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

➤ Ειδικότερα αν θεωρήσουμε μια γωνία με κορυφή το Α και μια γωνία με κορυφή το Β έχουμε τα παρακάτω ζευγάρια :

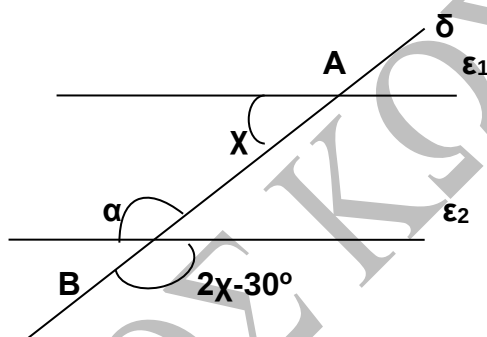
☒ Οι **εντός εναλλάξ γωνίες** οι οποίες είναι **ίσες** μεταξύ τους.
 $\hat{A}_3 = \hat{B}_2, \hat{A}_4 = \hat{B}_1$.

☒ Οι **εντός-εκτός και επί τα αυτά γωνίες**
 οι οποίες είναι **ίσες** μεταξύ τους
 $\hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_2 = \hat{B}_2, \hat{A}_3 = \hat{B}_3, \hat{A}_4 = \hat{B}_4$

☒ Οι **εντός και επί τ'αυτά γωνίες**
 οι οποίες είναι **παραπληρωματικές** $\hat{A}_3 + \hat{B}_1 = 180^\circ, \hat{A}_4 + \hat{B}_2 = 180^\circ$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι γωνίες α και χ στο παρακάτω σχήμα ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$)



Λύση

Οι παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από την δ άρα $\hat{\alpha} = 2\hat{\chi} - 30^\circ$ ως κατακορυφών και

$\hat{\alpha} + \hat{\chi} = 180^\circ$ ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2 τις οποίες τέμνει η δ άρα $2\hat{\chi} - 30^\circ + \hat{\chi} = 180^\circ$ ή $3\hat{\chi} - 30^\circ = 180^\circ$ ή

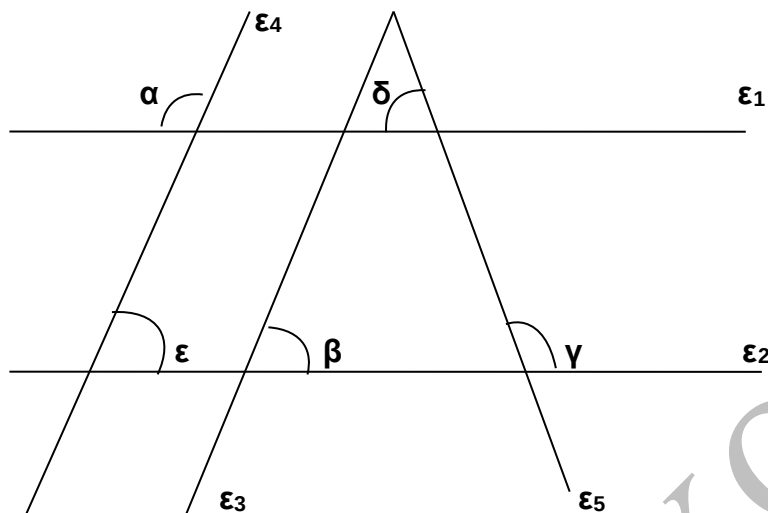
$3\hat{\chi} = 180^\circ + 30^\circ$ ή $3\hat{\chi} = 210^\circ$ ή $\hat{\chi} = 210^\circ : 3$ ή $\hat{\chi} = 70^\circ$

Άρα οι οξείες γωνίες είναι ίσες $\hat{\chi} = 70^\circ$ και $\hat{\alpha} = 110^\circ$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εργασία

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ αν $\hat{\delta} = \hat{\varepsilon} = 70^\circ$



Λύση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

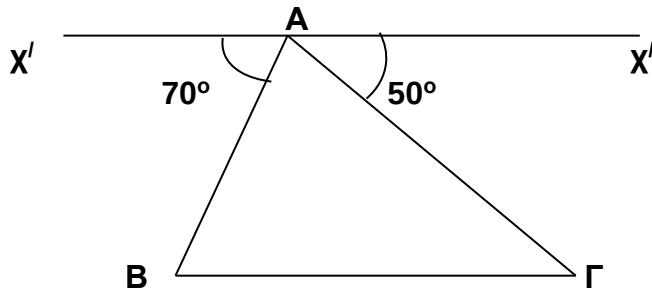
.....

.....

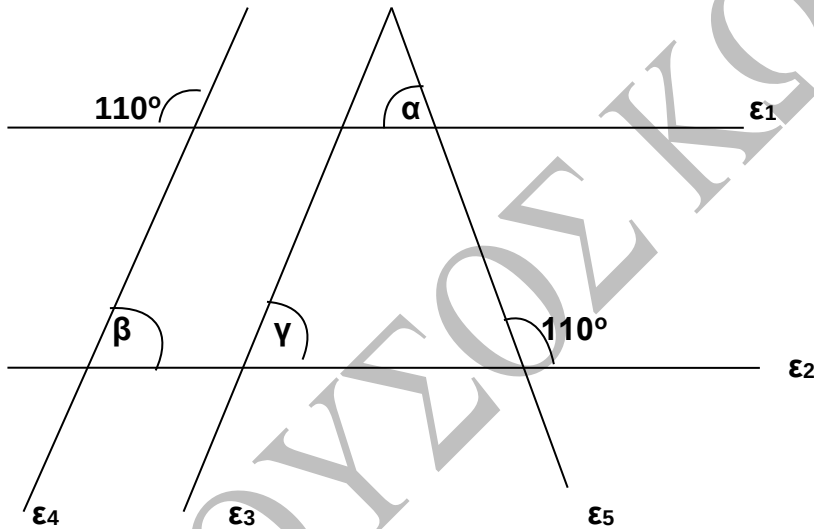
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ασκήσεις

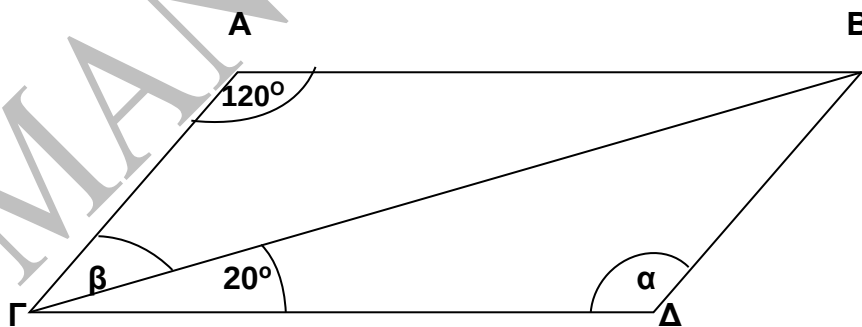
1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $A\chi \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



2. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και $\epsilon_3 \parallel \epsilon_4$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$.



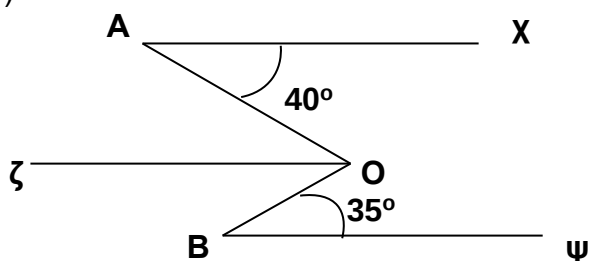
3. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ στο παρακάτω παραλληλόγραμμο.



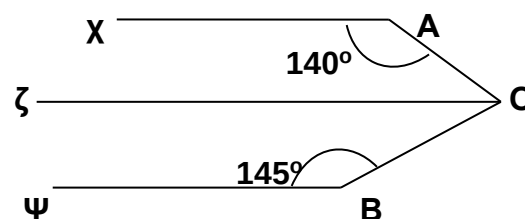
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

4. Να υπολογίσετε την γωνία AOB στα παρακάτω σχήματα ($A\chi \parallel B\psi \parallel O\zeta$).

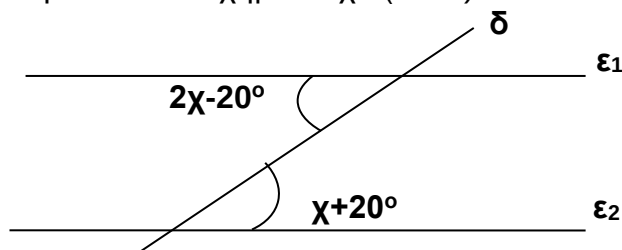
A)



B)



5. Να υπολογίσετε στο σχήμα το χ ($\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$).



6. Βρείτε το μέσο O του AB . Στην συνέχεια βρείτε τα συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας το O : α) του σημείου A , β) της ημιευθείας $A\chi$, γ) της γωνίας $AO\chi'$ και να συγκρίνετε τις γωνίες $AO\chi'$ $OB\psi$ μεταξύ τους. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7. Δυο ευθείες παράλληλες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ϵ στα σημεία A και B αντίστοιχα και η γωνία $\epsilon A\chi$ είναι 60° . Φέρτε την διχοτόμο της γωνίας $AB\psi$ που τέμνει την $\chi\chi'$ στο Δ και φέρτε $A\Gamma$ κάθετη στην $\psi\psi'$ που τέμνει την διχοτόμο $B\Delta$ στο E . Υπολογίστε όλες τις γωνίες που σχηματίζονται.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 3^ο

3.1 Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

Ποια τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου ;

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι τρεις γωνίες του και οι τρεις πλευρές του.

Ποια τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες τους ;

- 1)Ορθογώνιο (έχει μια ορθή γωνία)
- 2)Αμβλυγώνιο (έχει μια αμβλεία γωνία)
- 3)Οξυγώνιο (έχει τρεις οξείες γωνίες)

Ποια τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές τους ;

- 1)Ισόπλευρο (έχει όλες τις πλευρές του ίσες)
- 2)Ισοσκελές (έχει δυο ίσες πλευρές)
- 3)Σκαληνό (έχει όλες τις πλευρές του άνισες)

Ποια τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου ;

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι η διάμεσος , το ύψος , και η διχοτόμος του.

Τι ονομάζουμε διάμεσο ενός τριγώνου ;

Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Τι ονομάζουμε ύψος ενός τριγώνου ;

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζουμε την απόσταση μιας κορυφής του από την ευθεία της απέναντι πλευράς.

Τι ονομάζουμε διχοτόμο ενός τριγώνου ;

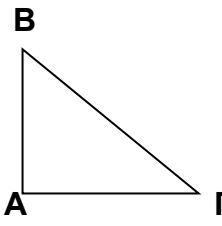
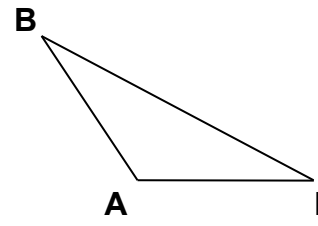
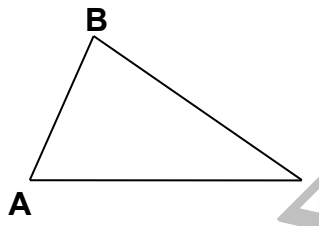
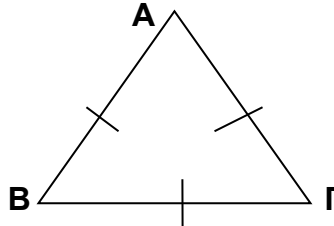
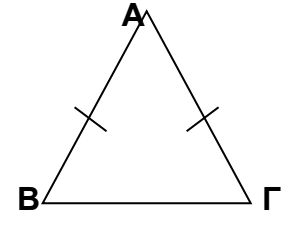
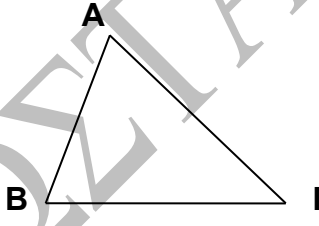
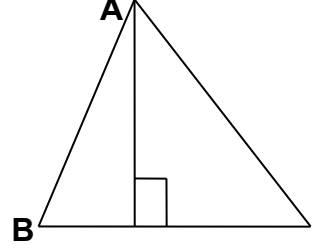
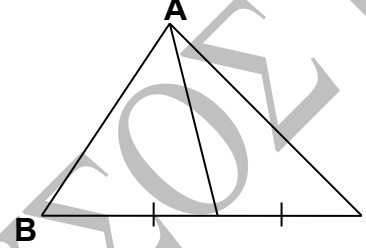
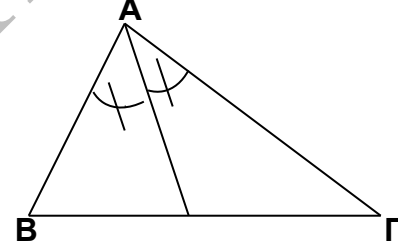
Διχοτόμο ενός τριγώνου ονομάζουμε την ημιευθεία με αρχή την κορυφή του τριγώνου η οποία χωρίζει την αντίστοιχη γωνία σε δυο ίσες γωνίες.



Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη τρεις διχοτόμους και τρεις διαμέσους .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σχήματα

 Ορθογώνιο	 Αμβλυγώνιο	 Οξυγώνιο
 Ισόπλευρο	 Ισοσκελές	 Σκαληνό
 Δ Ύψος	 Μ Διάμεσος	 Θ Διχοτόμος

Ασκήσεις

1. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο AB ($AB=AC$) φέρνουμε το ύψος AD . Τι παρατηρείτε για τα 2 τρίγωνα που σχηματίζονται ;
2. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο ABC και ονομάστε M το μέσο της πλευράς AB .
Α) Φέρτε από το A παράλληλη προς τη BC και ονομάστε E το σημείο στο οποίο η παράλληλη αυτή τέμνει την AC .Συγκρίνετε τα τμήματα AE και EC .
Β) Φέρτε από το A παράλληλη προς τη BC και ονομάστε Z το σημείο στο οποίο η παράλληλη αυτή τέμνει την BC .Συγκρίνετε τα τμήματα BZ και ZC .
3. Σχεδιάσε από κάθε κορυφή ενός τριγώνου ευθεία παράλληλη προς την απέναντι πλευρά και σύγκρινε τα τρίγωνα που σχηματίζονται μεταξύ τους και με το αρχικό τρίγωνο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου

Με τι ισούται το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ;

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180° .

Ποιες οι ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου ;

- ✎ Η ευθεία της διαμέσου που αντιστοιχεί στη βάση είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου.
- ✎ Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ύψος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής .
- ✎ Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

Ποιες οι ιδιότητες ισόπλευρου τριγώνου ;

- ✎ Οι ευθείες των διαμέσων του ισόπλευρου τριγώνου είναι άξονες συμμετρίας του .
- ✎ Κάθε διάμεσος ισόπλευρου τριγώνου είναι ύψος και διχοτόμος του.
- ✎ Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του είναι ίσες μεταξύ τους .

Παραδείγματα

1) Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ μια γωνία του είναι ίση με 35° .Να υπολογιστούν οι υπόλοιπες .

Λύση

1^η) Περίπτωση : αν $\hat{A} = 35^\circ$ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

αφού ABΓ ισοσκελές τρίγωνο

$$\text{οπότε } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 35^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ$$

$$\text{ή } 35^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \text{ ή } 2\hat{B} = 180^\circ - 35^\circ$$

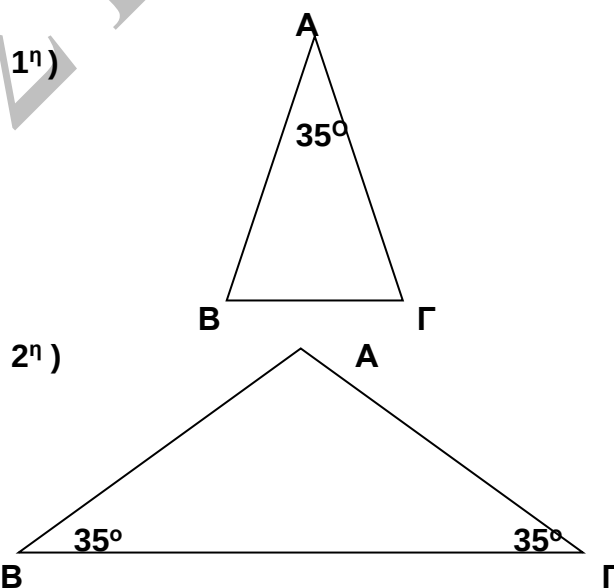
$$\text{ή } 2\hat{B} = 145^\circ \text{ ή } \hat{B} = 145 : 2 = 72,5^\circ$$

2^η) Περίπτωση: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 35^\circ$ τότε

$$\hat{A} + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ \text{ ή }$$

$$\hat{A} + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\text{ή } \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ \text{ ή } \hat{A} = 110^\circ$$



2) Σε τρίγωνο ABΓ η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας A και η γωνία Γ τριπλάσια της A. Να υπολογιστούν οι γωνίες A, B, Γ.

Λύση

$$\text{Αν } \hat{A} = \chi \text{ τότε } \hat{B} = 2 \cdot \chi \text{ και } \hat{\Gamma} = 3 \cdot \chi \text{ άρα } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\text{ή } \chi + 2 \cdot \chi + 3 \cdot \chi = 180^\circ \text{ ή } 6 \cdot \chi = 180^\circ \text{ ή } \chi = 180^\circ : 6 \text{ ή } \chi = 30^\circ$$

$$\text{οπότε } \hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \text{ και } \hat{\Gamma} = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Εργασία

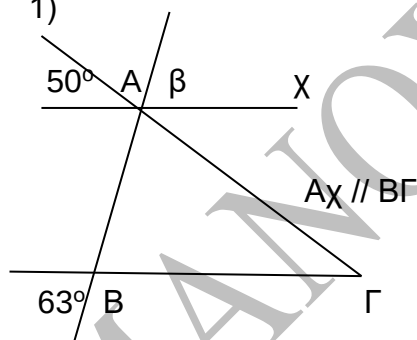
Σε ένα τρίγωνο η γωνία B είναι κατά 15° μεγαλύτερη της A και 30° μικρότερη της γωνίας Γ. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

Λύση

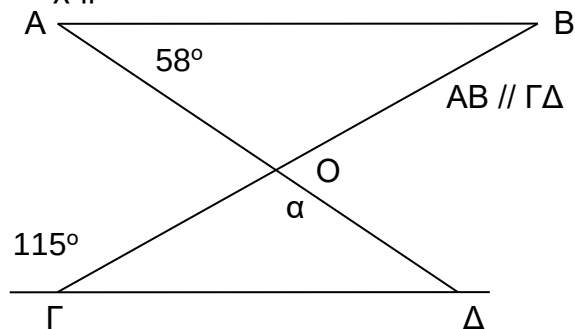
Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι αν έχουμε δυο ευθείες που τις τέμνει μια τρίτη η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δυο εντός και επί τα αυτά γωνιών είναι ορθή.
2. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB=AG$) φέρτε την προέκταση Αχ της πλευράς AB προς το μέρος του A και από το A φέρτε Αψ // ΒΓ. Δικαιολογήστε γιατί $\chi\hat{A}\psi = \psi\hat{A}\Gamma$. Τι είναι η Αψ της γωνίας $\chi\hat{A}\Gamma$.
3. Γράψτε ένα κύκλο (Ο,ρ) και μια διάμετρο του ΒΓ. Πάρτε ένα σημείο Α του κύκλου και φέρτε τις ΑΒ, ΑΓ, ΑΟ. Να υπολογιστεί γωνία $B\hat{A}\Gamma$.
4. Σε τρίγωνο ABΓ $\hat{B} = 70^\circ, \hat{A} = 80^\circ$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΕ. Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}E$.
5. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ στα παρακάτω σχήματα :

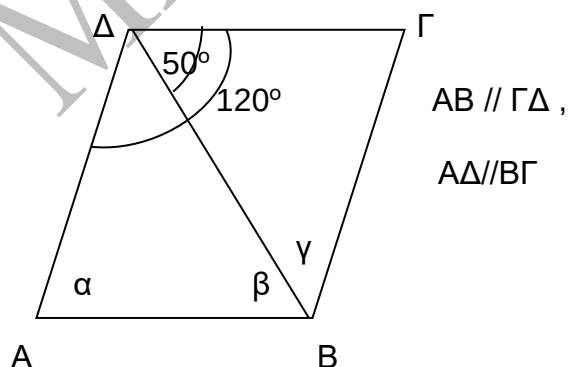
1)



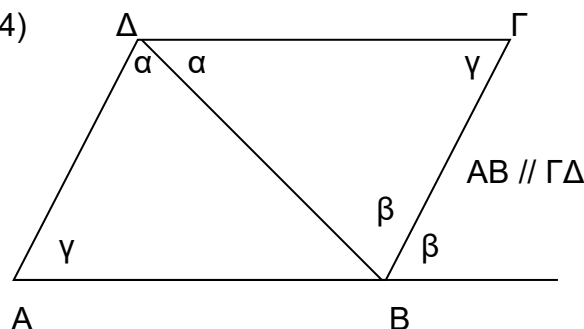
2)



3)



4)



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

6. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) $\hat{A} = 40^\circ$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται στο I . Να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{I}\Gamma$.

7. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της $\hat{B}$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι το μισό της $\hat{\Gamma}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

8. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι τριπλάσια της $\hat{B}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

3.3 Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο – Ισοσκελές τραπέζιο

Ποιο τετράπλευρο ονομάζεται παραλληλόγραμμο ;

Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

✎ Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί βάση του .

✎ Ύψος του παραλληλογράμμου ονομάζεται η απόσταση των παράλληλων πλευρών του.

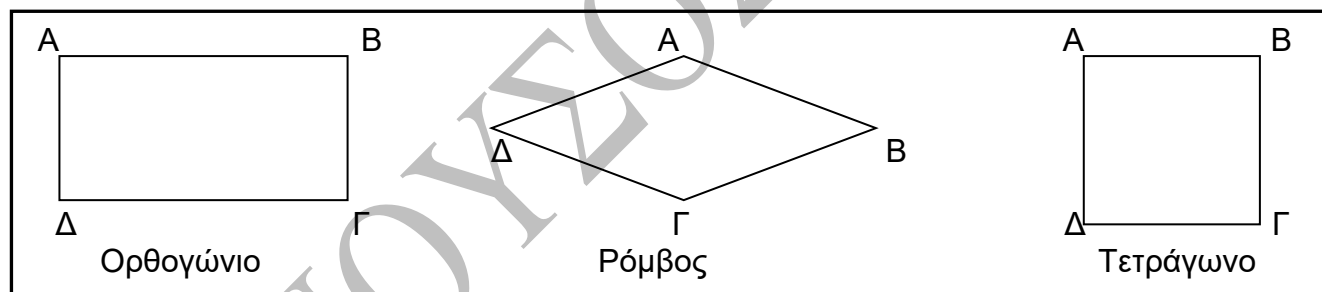
Ποια είδη παραλληλογράμμων γνωρίζετε;

☒ Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

☒ Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

☒ Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές του ίσες .

Σχήματα



Ποιο τετράπλευρο ονομάζεται τραπέζιο ;

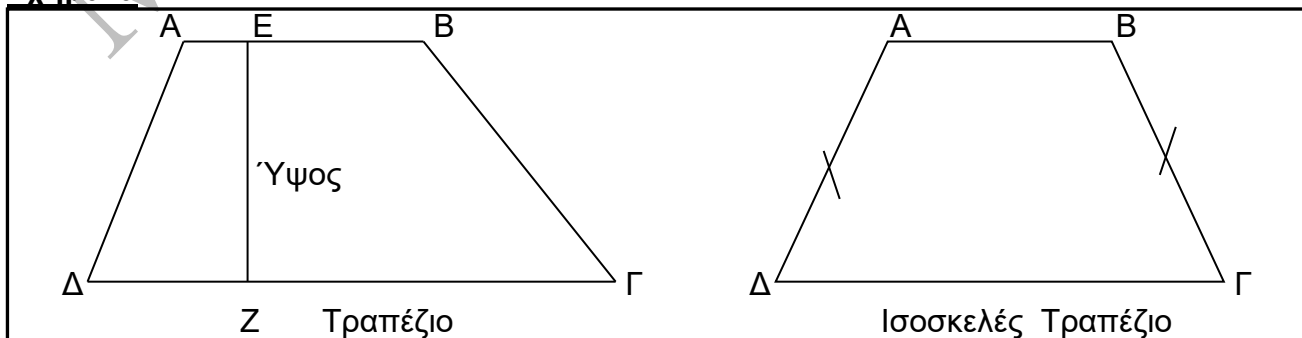
Τραπέζιο ονομάζεται το τετράπλευρο του οποίου μόνο δυο πλευρές είναι παράλληλες.

✎ Βάσεις του τραpezίου λέγονται οι παράλληλες πλευρές του .

✎ Ύψος του τραpezίου ονομάζεται η απόσταση των βάσεων του .

Ισοσκελές τραπέζιο ονομάζεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.

Σχήματα



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3.4 Ιδιότητες Παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου – Τετραγώνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπεζίου

Ιδιότητες Παραλληλογράμμου

- ✗ Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.
- ✗ Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.
- ✗ Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- ✗ Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

Ιδιότητες ορθογωνίου

- ✗ Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- ✗ Οι διαγώνιες του είναι ίσες.

Ιδιότητες ρόμβου

- ✗ Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας.
- ✗ Οι διαγώνιες του είναι κάθετες.
- ✗ Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του.

Ιδιότητες τετραγώνου

- ✗ Οι ευθείες των διαγωνίων και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- ✗ Οι διαγώνιες του είναι ίσες.
- ✗ Οι διαγώνιες του είναι κάθετες.
- ✗ Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

- ✗ Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- ✗ Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες.
- ✗ Οι διαγώνιες του είναι ίσες.

Ασκήσεις

- 1.** Χαράξτε τα ύψη παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ από την κορυφή Α όταν $\hat{A}$ η γωνία είναι οξεία.
- 2.** Η μια πλευρά παραλληλογράμμου είναι 6 cm και η περιμέτρός του είναι ίση με την περίμετρο ενός τετραγώνου πλευράς 7 cm. Βρείτε τις άλλες πλευρές του παραλληλογράμμου.
- 3.** Να κατασκευαστεί τετράγωνο πλευράς 8 cm.
- 4.** Η γωνία $\hat{A}$ παραλληλογράμμου είναι 60° . Φέρτε τις διχοτόμους των γωνιών του και υπολογίστε τις γωνίες του καινούργιου σχήματος.
- 5.** Η γωνία ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι $\hat{A}=48^\circ$ υπολογίστε τις υπόλοιπες γωνίες του.