

2ο Κεφάλαιο Κλάσματα Λυμένες Ασκήσεις

Κλάσματα - Ισοδύναμα κλάσματα - Σύγκριση

1) Ένα σχολείο έχει 320 μαθητές. Να βρείτε πόσοι είναι τα $\frac{4}{5}$ των μαθητών.

Λύση: Οι 320 μαθητές εκφράζονται από το κλάσμα $\frac{5}{5}$ άρα τα $\frac{4}{5}$ των μαθητών θα είναι το αποτέλεσμα του γινόμενου $\frac{4}{5}$ επί το σύνολο των μαθητών 320: $\frac{4}{5} \cdot 320 = \frac{4}{5} \cdot \frac{320}{1} = \frac{4 \cdot 320}{5 \cdot 1} = \frac{1280}{5} = 256$ μαθητές.

2) Ένας οινοπώλης έχει 184 κιλά κρασί και πούλησε τα $\frac{5}{8}$. Πόσα κιλά κρασί πούλησε και πόσα του έμειναν.

Λύση: Τα 184 κιλά κρασί εκφράζονται από το κλάσμα $\frac{8}{8}$ άρα τα $\frac{5}{8}$ των μαθητών θα είναι το αποτέλεσμα του γινόμενου $\frac{5}{8}$ επί το σύνολο των 184 κιλών κρασιού:

$$\frac{5}{8} \cdot 184 = \frac{5}{8} \cdot \frac{184}{1} = \frac{5 \cdot 184}{8 \cdot 1} = \frac{920}{8} = 115 \text{ κιλά κρασί.}$$

Άρα ο οινοπώλης πούλησε 115 κιλά κρασί και του έμειναν :

Αρχικά κιλά κρασί - που πουλήθηκαν = $184 - 115 = 69$ κιλά κρασί.

3) Να απλοποιηθούν τα κλάσματα: α) $\frac{10}{16}$ β) $\frac{42}{7}$ γ) $\frac{28}{35}$ δ) $\frac{36}{45}$ ε) $\frac{33}{55}$.

Λύση: Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα βρίσκουμε το ΜΚΔ του αριθμητή και του παρονομαστή και στη συνέχεια διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με αυτόν.

α) $\frac{10}{16}$ ο ΜΚΔ(10,16)=2 άρα $\frac{10:2}{16:2} = \frac{5}{8}$ ανάγωγο (δεν μπορεί να απλοποιηθεί).

β) $\frac{42}{7}$ ο ΜΚΔ(42,7)=7 άρα $\frac{42:7}{7:7} = \frac{6}{1} = 6$.

γ) $\frac{28}{35}$ ο ΜΚΔ(28,35)=7 άρα $\frac{28:7}{35:7} = \frac{4}{5}$ ανάγωγο (δεν μπορεί να απλοποιηθεί).

δ) $\frac{36}{45}$ ο ΜΚΔ(36,45)=9 άρα $\frac{36:9}{45:9} = \frac{4}{5}$ ανάγωγο (δεν μπορεί να απλοποιηθεί).

ε) $\frac{33}{55}$ ο ΜΚΔ(33,55)=11 άρα $\frac{33:11}{55:11} = \frac{3}{5}$ ανάγωγο (δεν μπορεί να απλοποιηθεί).

4) Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 18 : $\frac{5}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{36}, \frac{12}{54}$.

Λύση: Στα 2 πρώτα κλάσματα παρατηρώ πως πρέπει να πολλαπλασιάσω με κάποιον αριθμό για να τα μετατρέψω σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 18, ενώ στα 2 τελευταία να θα πρέπει να διαιρέσω:

$$\frac{5}{6} \text{ ο αριθμός που θα πολλαπλασιάσω αριθμητή και παρονομαστή είναι ο } 3 \rightarrow \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$$

$$\frac{3}{9} \text{ ο αριθμός που θα πολλαπλασιάσω αριθμητή και παρονομαστή είναι ο } 2 \rightarrow \frac{3 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{6}{18}$$

$$\frac{4}{36} \text{ ο αριθμός που θα διαιρέσω αριθμητή και παρονομαστή είναι ο } 2 \rightarrow \frac{4:2}{36:2} = \frac{2}{18}$$

$$\frac{12}{54} \text{ ο αριθμός που θα διαιρέσω αριθμητή και παρονομαστή είναι ο } 3 \rightarrow \frac{12:3}{54:3} = \frac{4}{18}$$

5) Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά) :

$$\frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{4}{11}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}$$

Λύση: Σύγκριση κλασμάτων με ίδιο αριθμητή $\rightarrow$ Μεγαλύτερο το κλάσμα με το μικρότερο παρονομαστή.

Άρα $\frac{4}{11} < \frac{4}{9} < \frac{4}{7} < \frac{4}{5} < \frac{4}{3}$

6) Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά) :

$$\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{1}{5}, \frac{9}{5}$$

Λύση: Σύγκριση κλασμάτων με ίδιο παρονομαστή $\rightarrow$ Μεγαλύτερο το κλάσμα με το μεγαλύτερο αριθμητή.

Άρα $\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{6}{5} < \frac{7}{5} < \frac{9}{5}$

7) Να συγκρίνετε με το 1 τα κλάσματα: $\frac{7}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{7}$.

Λύση: Σύγκριση κλασμάτων με το 1 $\rightarrow$

- Όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από το παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1 $\rightarrow \text{Αν } \alpha > \beta \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} > 1.$
- Όταν ο αριθμητής είναι μικρότερος από το παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1 $\rightarrow \text{Αν } \alpha < \beta \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} < 1.$
- Όταν ο αριθμητής είναι ίσος με το παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ίσο με το 1 $\rightarrow \text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = 1.$

Οπότε το $7 > 5$ άρα $\frac{7}{5} > 1$, το $2 < 3$ άρα $\frac{2}{3} < 1$ και $7=7$ άρα $\frac{7}{7} = 1$

Πράξεις με κλάσματα (Πρόσθεση, Αφαίρεση, Πολλαπλασιασμός, Διαίρεση)

1) Να κάνετε τις πράξεις. α) $\frac{4}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$ β) $3\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} + 4\frac{1}{3}.$

Λύση:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \frac{4}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) &= \frac{4}{5} - \left(\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 1} \right) = \frac{4}{5} - \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{4}{5} - \left(\frac{2+1}{6} \right) = \frac{4}{5} - \frac{3}{6} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6} - \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \\ &= \frac{24}{30} - \frac{15}{30} = \frac{24-15}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad 3\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} + 4\frac{1}{3} &= \left(3 + \frac{1}{4} \right) + \left(1 + \frac{3}{4} \right) + \left(4 + \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{3}{1} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{4}{1} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 1} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{12}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{4}{4} + \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{12}{3} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{12+1}{4} \right) + \left(\frac{4+3}{4} \right) + \left(\frac{12+1}{3} \right) = \frac{13}{4} + \frac{7}{4} + \frac{13}{3} = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{13 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \\ &= \frac{39}{12} + \frac{21}{12} + \frac{52}{12} = \frac{39+21+52}{12} = \frac{112}{12} = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις :

Προτεραιότητα πράξεων: Πρώτα εκτελώ τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις!!!

Μεικτοί αριθμοί: Ο συμβολισμός $3\frac{1}{4}$ εκφράζει το άθροισμα του ακεραίου 3 με το κλάσμα $\frac{1}{4}$ δηλαδή

$$3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}.$$

2) Να υπολογιστεί η παράσταση : $A = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}$.

Λύση:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6}\right) \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \left(\frac{9}{12} + \frac{10}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{14}{12} - \frac{6}{12}\right) \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{9+10}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{14-6}{12}\right) \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \left(\frac{19}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{8}{12}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19 \cdot 1}{12 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 1}{12 \cdot 3} = \frac{19}{24} + \frac{8}{36} = \frac{19 \cdot 3}{24 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 2}{36 \cdot 2} = \\ &= \frac{57}{72} + \frac{16}{72} = \frac{57+16}{72} = \frac{73}{72} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις :

Προτεραιότητα πράξεων: Πρώτα εκτελώ τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, μετά τους πολλαπλασιασμούς και στο τέλος την πρόσθεση!

3) Να υπολογιστεί η παράσταση : $B = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2} - \frac{5}{6}\right) : \left(3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right)$

Λύση:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2} - \frac{5}{6}\right) : \left(3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{1} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = \\ &= \left(\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}\right) : \left(\frac{3 \cdot 12}{1 \cdot 12} - \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3}\right) = \left(\frac{9}{12} + \frac{30}{12} - \frac{10}{12}\right) : \left(\frac{36}{12} - \frac{16}{12} + \frac{3}{12}\right) = \\ &= \left(\frac{9+30-10}{12}\right) : \left(\frac{36-16+3}{12}\right) = \frac{29}{12} : \frac{23}{12} = \frac{29}{12} \cdot \frac{12}{23} = \frac{29 \cdot \cancel{12}}{\cancel{12} \cdot 23} = \frac{29}{23} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις :

Προτεραιότητα πράξεων: Πρώτα εκτελώ τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και στο τέλος την διαίρεση μετατρέποντας την σε πολλαπλασιασμό $\rightarrow$ πολλαπλασιάζοντας το 1ο κλάσμα με το αντίστροφο του 2ου.

4) Να βρεθούν οι αντίστροφοι αριθμοί των : $\frac{12}{13}, 5, \frac{1}{9}, \frac{9}{6}$.

Λύση: Αντίστροφοι αριθμοί ή αντίστροφα κλάσματα λέγονται τα κλάσματα ή οι αριθμοί που το γινόμενο του κάνει 1. Δηλαδή : για τους αριθμούς γ, δ ισχύει ότι $\rightarrow \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\gamma \cdot \delta}{\delta \cdot \gamma} = \frac{\gamma \cdot \delta}{\gamma \cdot \delta} = \frac{\gamma}{\gamma} \cdot \frac{\delta}{\delta} = 1 \cdot 1 = 1$.

Άρα το $\frac{12}{13}$ έχει αντίστροφο το $\frac{13}{12}$ γιατί $\frac{12}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{12}{12} \cdot \frac{13}{13} = 1 \cdot 1 = 1$.

Το 5 έχει αντίστροφο το $\frac{1}{5}$ γιατί $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{1} = 1 \cdot 1 = 1$.

Το $\frac{1}{9}$ έχει αντίστροφο το $\frac{9}{1}$ γιατί $\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{1} = \frac{9}{9} \cdot \frac{1}{1} = 1 \cdot 1 = 1$.

Το $\frac{9}{6}$ έχει αντίστροφο το $\frac{6}{9}$ γιατί $\frac{9}{6} \cdot \frac{6}{9} = \frac{9}{9} \cdot \frac{6}{6} = 1 \cdot 1 = 1$.

5) Να γίνουν τα σύνθετα κλάσματα απλά : $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$, $\frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{5}}$.

Λύση: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8}$, $\frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{5}} = \frac{2}{1 \cdot 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Παρατηρήσεις :

Πως κάνουμε ένα σύνθετο κλάσμα απλό $\rightarrow \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$ πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με παρονομαστή και παρονομαστή με αριθμητή.

6) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων: α) $A = \frac{3}{8} \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{2}{5}$ β) $B = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}} : \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}}$

Λύση: α) $A = \frac{3}{8} \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{8} \right) \cdot \left(\frac{11}{6} \right) \cdot \left(\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{3 \cdot 7}{1 \cdot 8} \right) \cdot \left(\frac{5 \cdot 1}{11 \cdot 6} \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 6} \right) =$
 $= \frac{21}{8} \cdot \frac{5}{66} \cdot \frac{10}{6} = \frac{1050}{3168} = \frac{525}{1584}$

β) $B = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}} : \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}} = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}} \right) : \left(\frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}} \right) = \left(\frac{\frac{3+1}{2}}{\frac{4+4}{6}} \right) : \left(\frac{\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 11}}{\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 11}} \right) = \left(\frac{4}{8} \right) : \left(\frac{8}{55} \right) =$
 $= \left(\frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 8} \right) : \left(\frac{8 \cdot 55}{56 \cdot 6} \right) = \frac{24}{48} : \frac{440}{336} = \frac{24}{48} \cdot \frac{336}{440} = \frac{1}{2} \cdot \frac{336}{440} = \frac{168}{440} = \frac{42}{110} = \frac{21}{55}$

Παρατηρήσεις : Πρώτα εκτελούμε τις πράξεις στους αριθμητές και παρονομαστές στα σύνθετα κλάσματα, μετά μετατρέπουμε τα σύνθετα σε απλά και στο τέλος κάνουμε τις μεταξύ τους πράξεις.

7) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot 3 + 3\frac{5}{6} - 1\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \quad \beta) B = \left(\frac{1}{4} + 3\right) : \frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad A &= \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot 3 + 3\frac{5}{6} - 1\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{15}{12} + \frac{6}{12} - \frac{8}{12}\right) \cdot 3 + \left(3 + \frac{5}{6}\right) - \left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \left(\frac{15+6-8}{12}\right) \cdot 3 + \left(\frac{3}{1} + \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{12} \cdot \frac{3}{1} + \left(\frac{18+5}{6}\right) - \left(\frac{4+3}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{39}{12} + \frac{23}{6} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{39}{12} + \frac{23}{6} - \frac{7}{12} = \frac{39+46-7}{12} = \frac{85}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad B &= \left(\frac{1}{4} + 3\right) : \frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{1}\right) : \frac{1}{2} + \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}\right) = \\ &= \left(\frac{1+12}{4}\right) : \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} - \frac{6}{4} = \frac{13}{4} : \frac{1}{2} + \left(\frac{6+1}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} - \frac{6}{4} = \frac{13}{4} \cdot \frac{2}{1} + \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{6} - \frac{6}{4} = \\ &= \frac{26}{4} + \frac{35}{18} - \frac{6}{4} = \frac{26-6}{4} + \frac{35}{18} = \frac{20}{4} + \frac{35}{18} = \frac{180+75}{36} = \frac{255}{36} \end{aligned}$$

8) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 4 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) \quad \beta) B = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad A &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 4 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{3-2}{6}\right) : 4 + \left(\frac{5-4}{20}\right) : \left(\frac{3-2}{18}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{6}\right) : \frac{4}{1} + \left(\frac{1}{20}\right) : \left(\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \cdot \frac{18}{1} = \frac{1}{24} + \frac{18}{20} = \frac{5+108}{120} = \frac{113}{120} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{p)} \quad B &= \frac{1}{2 + \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\left(\frac{2}{1} + \frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\left(\frac{4+1}{2}\right)}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)}} = \frac{1}{2 + \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)}{2}} = \frac{1}{2 + \left(\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 5}\right)} = \\
 &= \frac{1}{2 + \left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{1} + \frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{10+2}{5}} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{12}{5}} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 12} = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$