



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο:

A. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

B. Όταν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, τότε τα αντικαθιστούμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.

Γ. Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.



ΘΕΜΑ 2º:

A. $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, $\epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$

B. Για την απόσταση $\rho = OM$ ενός σημείου $M(x, y)$ από

την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ή} \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη με το ρ^2 , τότε έχουμε:

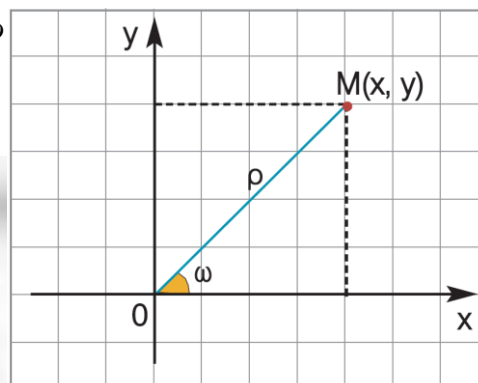
$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \quad \text{ή} \quad 1 = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2$$

Επειδή $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ η ισότητα γίνεται:

$$1 = (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 \quad \text{ή} \quad \text{συντομότερα} \quad \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Γ. Νόμος των ημιτόνων: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

Τον χρησιμοποιούμε σε οποιαδήποτε τρίγωνο, αν γνωρίζουμε δύο πλευρές και μία αντίστοιχη γωνία αυτών, ή αν γνωρίζουμε δύο γωνίες και μία αντίστοιχη πλευρά αυτών για να βρούμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία.





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

A. Έστω x ο μικρότερος από τους δύο αριθμούς, τότε $x+1$ ο άλλος αριθμός

$$\text{Άρα, } x^2 + (x+1)^2 = 265$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 265$$

$$2x^2 + 2x - 264 = 0$$

$$x^2 + x - 132 = 0$$

B. Είναι: $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-132) = 1 + 528 = 529$$

$$\text{Είναι: } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 23}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + 23}{2} = \frac{22}{2} = 11 \\ \frac{-1 - 23}{2} = \frac{-24}{2} = -12 \end{cases}$$

Αλλά, $x = -12$ απορρίπτεται γιατί δεν είναι φυσικός αριθμός.

Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: 11 και 12.



ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

A. Είναι: $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ -3\alpha + 5\beta = 2 \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ -3\alpha + 5\beta = 2 \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{cases} 6\alpha + 9\beta = 15 \\ -6\alpha + 10\beta = 4 \end{cases}$

$$19\beta = 19$$

$$\frac{19\beta}{19} = \frac{19}{19}$$

$$\beta = 1$$

Για $\beta = 1$ είναι: $2\alpha + 3 \cdot 1 = 5$

$$2\alpha + 3 = 5$$

$$2\alpha = 5 - 3$$

$$2\alpha = 2$$

$$\frac{2\alpha}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\alpha = 1$$

Άρα, $(\alpha, \beta) = (1, 1)$

B. Είναι: $A = 2x^2 + x = x(2x + 1)$ και

$$B = 4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x - 1)(2x + 1)$$

Γ. Για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$ είναι: $\frac{A}{B} = \frac{x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{\cancel{x(2x+1)}}{(2x-1)\cancel{(2x+1)}} = \frac{x}{2x-1}$



ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι $\varepsilon\varphi B = -1$ και $\sigma\upsilon\nu A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του και να βρείτε, σε μοίρες, τη μεγαλύτερη γωνία του.

B. Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας A .

Γ. Αν επιπλέον, γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ είναι 2, να προσδιορίσετε το μήκος της $B\Gamma$.

A. Επειδή $\varepsilon\varphi B = -1$ άρα η $\hat{B} > 90^\circ$ άρα το τρίγωνο αμβλυγώνιο.

Είναι: $\varepsilon\varphi B = -1 = -\varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = \varepsilon\varphi 135^\circ$ οπότε $\hat{B} = 135^\circ$

B. Είναι: $\eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1$

$$\eta\mu^2 A + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\eta\mu^2 A + \frac{3}{4} = 1$$

$$\eta\mu^2 A = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ 

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



$$\eta\mu^2 A = \frac{1}{4}$$

$$\eta\mu A = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu A = \frac{1}{2}$$

Επειδή $\hat{A}$ οξεία, άρα $\eta\mu A > 0$ άρα $\eta\mu A = \frac{1}{2}$

Γ. Από τον νόμο των ημιτόνων, είναι: $\frac{B\Gamma}{\eta\mu A} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu B}$

$$\text{Οπότε} \quad \frac{B\Gamma}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} B\Gamma = 1$$

$$B\Gamma = \sqrt{2}$$

