

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{2}$
2. Αν $2 < x < 3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$.
3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
 $A = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{128}$, $B = \sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{243}$
4. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:
 i. $(2x^2 + 1)^2$ ii. $(\alpha^2 - 2\beta^2)^2$ iii. $(-3x^2 + 2)^2$ iv. $\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{3}\beta\right)^2$ v. $(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$
 vi. $(\alpha + 2\beta)^3$ vii. $(1 - xy)^3$ viii. $(2\alpha\beta^2 - 3\beta)^3$
5. Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:
 i. $(3 + \dots)^2 = \dots + \dots + 16y^2$ ii. $(\dots - 9\beta)^2 = 25 - \dots + \dots$
 iii. $(\dots - \dots)^2 = \dots - 6\alpha\beta + \dots$ iv. $(\dots - 2\beta)^2 = 3\alpha^2 - \dots + \dots$
6. Να γίνουν οι πράξεις με την βοήθεια των σχετικών ταυτοτήτων:
 i. $(x+2)^2 - (x+3)(x-3) - 2(2x-3)$ ii. $(2x+1)^2 - (3x-2)^2 - (2x+5)(5-2x)$
7. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:
 α) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ β) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$
8. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $2\alpha\beta - 2\alpha\gamma =$ β) $6x^2 + 3x =$ γ) $3\alpha^2 + 3\alpha\beta - 3\alpha\gamma =$ δ) $6\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^2\beta^3 =$
 ε) $\alpha(x^2 + 2) + \beta(x^2 + 2) =$ στ) $12x^2y + 6xy^2 - 3xy =$ ζ) $15\alpha^3\beta^2\gamma - 5\alpha^2\beta^3\gamma^2 - 20\alpha^4\beta^4\gamma^3x =$
 η) $x(2\alpha - \beta) + y(\beta - 2\alpha) =$ θ) $\alpha(x-1) - x + 1 =$
9. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $(\alpha + \beta)(x - 3y) - 2\alpha(x - 3y) =$ β) $(4\alpha - 2\beta)(2x - 3y) + (3y - 2x)(\beta - 2\alpha) =$
 γ) $\alpha^2(x-1)(\alpha + \beta) + \alpha^2(1-x) =$ δ) $6(y-2)^3(y+8)^5 + 3(y+8)^6(y-2)^2 =$
10. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $\alpha x + \beta x + \alpha y + \beta y =$ β) $x^2 + xy - x - y =$ γ) $x^3 + x^2 + x + 1 =$
 δ) $\alpha^2 - 5\alpha + 4\alpha - 20 =$ ε) $2x^4 - 2x^3 + 3x - 3 =$ στ) $\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3 =$
11. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $4 - x^2 =$ β) $9\theta^2 - 25 =$ γ) $16\kappa^2 - 81\lambda^2 =$ δ) $\alpha^2 - 5 =$ ε) $\alpha^6 - \delta^4 =$
 ζ) $(\alpha - 2\beta)^2 - 4\beta^2 =$ η) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 =$ θ) $(x - y)^2 - 1 =$ υ) $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{100}{\beta^4} =$
12. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $3x^3 - 3x =$ β) $3\alpha^3\beta - 27\alpha\beta^3 =$ γ) $x^{\mu+2} - x^\mu =$ δ) $x^4 - y^4 =$
 ε) $5\alpha^4 - 80 =$ στ) $\alpha x^2 - \alpha y^2 + \beta x^2 - \beta y^2 =$ ζ) $\alpha^5 - 1 + \alpha^4 - \alpha =$

13. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\frac{4x^2 - xy}{12xy - 3y^2}$ β) $\frac{\varphi^3 - \varphi}{\varphi^2 + \varphi}$ γ) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$ δ) $\frac{(3x - 2y)^2}{4y^2 - 9x^2}$ ε) $\frac{3\alpha\beta^3 + 3\alpha^3\beta - 6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3 - 6\alpha^3\beta}$

14. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $x^2 + 10x + 25$ β) $9x^2 + 4 - 12x$ γ) $x^2 - 3x - 10$ δ) $x^2 + 5x + 4$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-2}{x} = \frac{x+1}{x-1}$ β) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$

16. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις:

$A = (x-2)^2 - (3x-6)(2x+5) + x^2 - 4$, $B = 9(2x-3)^2 - 4(5x+3)^2$

α) Να τρέψετε σε γινόμενα τις παραστάσεις A, B.

β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = 5$.

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 + 5x + 6 = 0$ β) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ γ) $x^2 - 4x + 1 = 0$ δ) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ ε) $x^2 + 3x + 3 = 0$

18. Να αποδείξετε ότι: α) $x^2 + 9 \geq 6x$

β) $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

19. Αν $x > 3$ και $y > 4$, να αποδείξετε ότι: $3x + 4y > 25$

20. Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $\frac{x+1}{2} - \frac{2x+3}{5} > \frac{x+5}{4}$ β) $\frac{x+1}{2} > x - \frac{2x+3}{4}$

21. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $-6 < 2 - 4x < 9$

22. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} -x + 5y = 9 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ β) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = -3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{5}{6} \end{cases}$

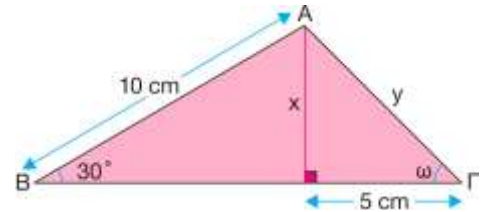
23. Αν η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$ έχει ρίζες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = -1$, να βρείτε τα a και β .

24. Να βρείτε μία λύση (x_0, y_0) του συστήματος $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ τέτοια ώστε $3x_0 - y_0 = 1$.

25. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - 6y = 13 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ με δεδομένο ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda x - 4y = 16 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ δέχεται σαν λύση το ζεύγος $(x, y) = (3, -1)$.

Γεωμετρία

26. Σε δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ να δείξετε ότι:
 α) Οι διχοτόμοι AK και $\Delta\Lambda$ είναι ίσες β) Οι διάμεσοι BM και $E\Theta$ είναι ίσες.
27. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ορίζουν ισοσκελές τρίγωνο.
28. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα σημεία Δ, E της ευθείας $B\Gamma$ που δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$, τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν $\Delta Z \perp AB$ και $E\Theta \perp A\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.
29. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Αν $B\Delta, \Gamma E$ τα ύψη του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
30. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM και πάνω σε αυτή παίρνουμε τμήμα $M\Delta = AM$. Ν' αποδείξετε ότι:
 α) τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα β) $AB = \Delta\Gamma$ γ) $\hat{B}\Delta\Gamma = \hat{A}$.
31. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έστω M το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, από το οποίο φέρνουμε κάθετα τμήματα $M\Delta$ και $M\epsilon$ προς τις άλλες πλευρές. Να δείχθεί ότι $M\Delta = M\epsilon$.



32. Να υπολογίσετε τα μήκη x, y καθώς και τη γωνία ω του διπλανού σχήματος.

Τριγωνομετρία

33. Να βρείτε τη γωνία χ όταν $0 \leq \chi \leq 180^\circ$ και:
 α) $\sin \chi = 1 - \sin \chi$ β) $2\eta\mu \chi + \sqrt{3} = 0$ γ) $\epsilon\phi \chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
34. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\eta\mu \chi + \sin \chi}{2\epsilon\phi \chi + \sigma\phi 45^\circ}$, όταν $\chi = 120^\circ$.
35. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και γνωρίζουμε ότι $\sin \omega = -\frac{5}{6}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
36. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και γνωρίζουμε ότι $\epsilon\phi \omega = -\frac{4}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = 10\eta\mu \omega - 15\sin \omega + 12\epsilon\phi \omega$.
37. Να αποδείξετε ότι:
 α) $\eta\mu^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$ β) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sin^2 x}$
 γ) $(2\eta\mu x + 3\sin x)^2 + (3\eta\mu x - 2\sin x)^2 = 13$ δ) $\frac{\eta\mu \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{\eta\mu \alpha} = \frac{2}{\eta\mu \alpha}$

Λύσεις

$$1. \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4}} = \frac{|1+\sqrt{2}|}{2} + \frac{|1-\sqrt{2}|}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$2. \text{Είναι } A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = |x-2| + |x-3| \text{ και όταν } 2 < x < 3 \text{ είναι } x-2 > 0, x-3 < 0 \text{ και} \\ A = x-2-x+3=1$$

$$3. A = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{128} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{64 \cdot 2} \Leftrightarrow \\ A = \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2} + \sqrt{16}\sqrt{2} - \sqrt{64}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{243} = \sqrt{3} + \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{81 \cdot 3} = \sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{3} + \sqrt{16}\sqrt{3} - \sqrt{81}\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ B = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

$$4. \text{i. } (2x^2 + 1)^2 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1$$

$$\text{ii. } (\alpha^2 - 2\beta^2)^2 = (\alpha^2)^2 - 2\alpha^2 \cdot 2\beta^2 + (2\beta^2)^2 = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta^2 + 4\beta^4$$

$$\text{iii. } (-3x^2 + 2)^2 = (-3x^2)^2 + 2(-3x^2) \cdot 2 + 2^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$$

$$\text{iv. } \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{3}\beta\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{2}{3}\beta + \left(\frac{2}{3}\beta\right)^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha\beta + \frac{4}{9}\beta^2$$

$$\text{v. } (x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) = (x^2)^2 - \sqrt{2}^2 = x^4 - 2$$

$$\text{vi. } (\alpha + 2\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot 2\beta + 3\alpha(2\beta)^2 + (2\beta)^3 = \alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 + 8\beta^3$$

$$\text{vii. } (1 - xy)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot xy + 3 \cdot 1 \cdot (xy)^2 - (xy)^3 = 1 - 3xy + 3x^2y^2 - x^3y^3$$

$$\text{viii. } (2\alpha\beta^2 - 3\beta)^3 = (2\alpha\beta^2)^3 - 3 \cdot (2\alpha\beta^2)^2 \cdot 3\beta + 3 \cdot 2\alpha\beta^2 \cdot (3\beta)^2 - (3\beta)^3 = 8\alpha^3\beta^6 - 36\alpha^2\beta^5 + 54\alpha\beta^4 - 27\beta^3$$

$$5. \text{i. } (3 + 4y)^2 = 9 + 24y + 16y^2 \quad \text{ii. } (5 - 9\beta)^2 = 25 - 90\beta + 81\beta^2$$

$$\text{iii. } (3\alpha - \beta)^2 = 9\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{iv. } (\alpha\sqrt{3} - 2\beta)^2 = 3\alpha^2 - 4\alpha\beta\sqrt{3} + 4\beta^2$$

$$6. \text{i. } (x+2)^2 - (x+3)(x-3) - 2(2x-3) = x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 9) - 4x + 6 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 9 - 4x + 6 = 19$$

$$\text{ii. } (2x+1)^2 - (3x-2)^2 - (2x+5)(5-2x) = 4x^2 + 4x + 1 - (9x^2 - 12x + 4) - (5^2 - (2x)^2) = \\ 4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 12x - 4 - 25 + 4x^2 = -x^2 + 16x - 28$$

$$7. \text{a) } (x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy$$

$$\beta(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2 + (\beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

$$8. \text{a) } 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = 2\alpha(\beta - \gamma)$$

$$\beta) 6x^2 + 3x = 3x(2x + 1)$$

$$\gamma) 3\alpha^2 + 3\alpha\beta - 3\alpha\gamma = 3\alpha(\alpha + \beta - \gamma)$$

$$\delta) 6\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^2\beta^3 = 3\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)$$

$$\epsilon) \alpha(x^2 + 2) + \beta(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(\alpha + \beta)$$

$$\sigma) 12x^2y + 6xy^2 - 3xy = 3xy(4x + 3y - 1)$$

$$\zeta) 15\alpha^3\beta^2\gamma - 5\alpha^2\beta^3\gamma^2 - 20\alpha^4\beta^4\gamma^3x = 5\alpha^2\beta^2\gamma(3\alpha - \beta\gamma - 4\alpha^2\beta^2\gamma^2x)$$

$$\eta) x(2\alpha - \beta) + y(\beta - 2\alpha) = x(2\alpha - \beta) - y(2\alpha - \beta) = (2\alpha - \beta)(x - y)$$

$$\theta) \alpha(x-1) - x + 1 = \alpha(x-1) - (x-1) = (x-1)(\alpha-1)$$

9. α) $(\alpha + \beta)(x - 3y) - 2\alpha(x - 3y) = (x - 3y)(\alpha + \beta - 2\alpha) = (x - 3y)(\beta - \alpha)$
 β) $(4\alpha - 2\beta)(2x - 3y) + (3y - 2x)(\beta - 2\alpha) = -2(\beta - 2\alpha)(2x - 3y) - (2x - 3y)(\beta - 2\alpha) =$
 $-3(2x - 3y)(\beta - 2\alpha)$
 γ) $\alpha^2(x - 1)(\alpha + \beta) + \alpha^2(1 - x) = \alpha^2(x - 1)(\alpha + \beta) - \alpha^2(x - 1) = \alpha^2(x - 1)(\alpha + \beta - 1)$
 δ) $6(y - 2)^3(y + 8)^5 + 3(y + 8)^6(y - 2)^2 = 3(y + 8)^5(y - 2)^2[2(y - 2) + (y + 8)] =$
 $3(y + 8)^6(y - 2)^2(3y + 4)$

10. α) $\alpha x + \beta x + \alpha y + \beta y = x(\alpha + \beta) + y(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(x + y)$
 β) $x^2 + xy - x - y = x(x + y) - (x + y) = (x + y)(x - 1)$
 γ) $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$
 δ) $\alpha^2 - 5\alpha + 4\alpha - 20 = \alpha(\alpha - 5) + 4(\alpha - 5) = (\alpha - 5)(\alpha + 4)$
 ε) $2x^4 - 2x^3 + 3x - 3 = 2x^3(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(2x^3 + 3)$
 στ) $\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^2(\alpha - \beta) - \beta^2(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2) =$
 $(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)$

11. α) $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$ β) $9\theta^2 - 25 = (3\theta - 5)(3\theta + 5)$
 γ) $16\kappa^2 - 81\lambda^2 = (4\kappa - 9\lambda)(4\kappa + 9\lambda)$ δ) $\alpha^2 - 5 = (\alpha - \sqrt{5})(\alpha + \sqrt{5})$
 ε) $\alpha^6 - \delta^4 = (\alpha^3 - \delta^2)(\alpha^3 + \delta^2)$
 ζ) $(\alpha - 2\beta)^2 - 4\beta^2 = [(\alpha - 2\beta) - 2\beta][(\alpha - 2\beta) + 2\beta] = \alpha(\alpha - 4\beta)$
 η) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = [(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)][(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = 2\beta \cdot 2\alpha = 4\alpha\beta$
 θ) $(x - y)^2 - 1 = (x - y - 1)(x - y + 1)$ ι) $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{100}{\beta^4} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{10}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{10}{\beta^2}\right)$

12. α) $3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x - 1)(x + 1)$
 β) $3\alpha^3\beta - 27\alpha\beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha^2 - 9\beta^2) = 3\alpha\beta(\alpha - 3\beta)(\alpha + 3\beta)$
 γ) $x^{\mu+2} - x^\mu = x^\mu(x^2 - 1) = x^\mu(x - 1)(x + 1)$
 δ) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$
 ε) $5\alpha^4 - 80 = 5(\alpha^4 - 16) = 5(\alpha^2 - 4)(\alpha^2 + 4) = 5(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha^2 + 4)$
 ζ) $\alpha x^2 - \alpha y^2 + \beta x^2 - \beta y^2 = \alpha(x^2 - y^2) + \beta(x^2 - y^2) = (\alpha + \beta)(x^2 - y^2) = (\alpha + \beta)(x - y)(x + y)$
 η) $\alpha^5 - 1 + \alpha^4 - \alpha = \alpha^4(\alpha + 1) - (\alpha + 1) = (\alpha + 1)(\alpha^4 - 1) = (\alpha + 1)(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1) =$
 $(\alpha + 1)(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1) = (\alpha + 1)^2(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1)$

13. α) $\frac{4x^2 - xy}{12xy - 3y^2} = \frac{x(4x - y)}{3y(4x - y)} = \frac{x}{3y}$
 β) $\frac{\varphi^3 - \varphi}{\varphi^2 + \varphi} = \frac{\cancel{\varphi}(\varphi^2 - 1)}{\cancel{\varphi}(\varphi + 1)} = \frac{(\varphi - 1)\cancel{(\varphi + 1)}}{\cancel{\varphi + 1}} = \varphi - 1$

$$\gamma) \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2-x-3x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-1)-3(x-1)} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x-1)\cancel{(x-3)}} = \frac{x+3}{x-1}$$

$$\delta) \frac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2} = \frac{(3x-2y)^2}{(2y-3x)(2y+3x)} = \frac{(2y-3x)^2}{\cancel{(2y-3x)}(2y+3x)} = \frac{2y-3x}{2y+3x}$$

$$\epsilon) \frac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta} = \frac{\cancel{\beta^2}\alpha\cancel{\beta}(\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta)}{\cancel{\beta^2}\alpha\cancel{\beta}(\beta^2-\alpha^2)} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)} = \frac{\beta-\alpha}{2(\beta+\alpha)}$$

$$14. \alpha) x^2+10x+25=x^2+2\cdot 5\cdot x+5^2=(x+5)^2$$

$$\beta) 9x^2+4-12x=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2=(3x-2)^2$$

$$\gamma) x^2-3x-10=(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

Είναι $\alpha+\beta=-3$ και $\alpha\beta=-10$, άρα $\alpha=-2$ και $\beta=5$, οπότε $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$

$$\delta) x^2+5x+4=x^2+x+4x+4=x(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x+4)$$

$$15. \alpha) \text{ Πρέπει } x \neq 0 \text{ και } x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\frac{x-2}{x} = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-2)(x-1)=x(x+1) \Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x-x+2=\cancel{x^2}+x \Leftrightarrow$$

$$-2x-x-x=-2 \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} = \frac{-2}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ δεκτή}$$

$$\beta) \frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x} \Leftrightarrow \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{x(x-2)} = \frac{4-x}{x(x+2)}$$

$$\text{ΕΚΠ} = x(x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ και } x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

$$x(x-2)(x+2) \frac{2}{(x-2)(x+2)} - x(x-2)(x+2) \frac{x}{x(x-2)} = x(x-2)(x+2) \frac{4-x}{x(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$2x - x(x+2) = (x-2)(4-x) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{2x} = 4x - \cancel{x^2} - 8 + 2x \Leftrightarrow$$

$$8 = 6x \Leftrightarrow$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{8}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ δεκτή}$$

$$16. \alpha) A = (x-2)^2 - (3x-6)(2x+5) + x^2 - 4 = (x-2)^2 - 3(x-2)(2x+5) + (x-2)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$A = (x-2)[x - \cancel{3} - 3(2x+5) + x + \cancel{2}] = (x-2)(-4x-15) = -(x-2)(4x+15)$$

$$B = 9(2x-3)^2 - 4(5x+3)^2 = [3(2x-3) - 2(5x+3)][3(2x-3) + 2(5x+3)] \Leftrightarrow$$

$$B = (6x-9-10x-6)(6x-9+10x+6) = (-4x-15)(16x-3) = -(4x+15)(16x-3)$$

$$\beta) \frac{A}{B} = \frac{-(x-2)\cancel{(4x+15)}}{\cancel{-(4x+15)}(16x-3)} = \frac{x-2}{16x-3}$$

$$\gamma) \text{ Αρχικά πρέπει } B \neq 0 \Leftrightarrow -(4x+15)(16x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{15}{4} \text{ και } x \neq \frac{3}{16}$$

$$\frac{A}{B} = 5 \Leftrightarrow \frac{x-2}{16x-3} = 5 \Leftrightarrow x-2 = 80x-15 \Leftrightarrow 13 = 79x \Leftrightarrow x = \frac{13}{79}$$

$$17. \alpha) x^2+5x+6=0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1, x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2, x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

$$\beta) -x^2 - 7x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1, \quad x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-7-1}{2} = -4$$

$$\gamma) x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12, \quad x_1 = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = \frac{4+\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2} = 2+\sqrt{3},$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = \frac{4-\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\delta) 9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0, \quad x = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$$

$$\epsilon) x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0, \text{ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη}$$

$$18. \alpha) x^2 + 9 \geq 6x \Leftrightarrow x^2 + 9 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

$$\beta) 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - x^2 - 2xy - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

$$19. x > 3 \Leftrightarrow 3x > 9 \text{ (1) και } y > 4 \Leftrightarrow 4y > 16 \text{ (2)}$$

$$\text{Από (1) + (2)} \Rightarrow 3x + 4y > 25$$

$$20. \alpha) \frac{x+1}{2} - \frac{2x+3}{5} > \frac{x+5}{4} \Leftrightarrow 20 \frac{x+1}{2} - 20 \frac{2x+3}{5} > 20 \frac{x+5}{4} \Leftrightarrow 10(x+1) - 4(2x+3) > 5(x+5) \Leftrightarrow$$

$$10x + 10 - 8x - 12 > 5x + 25 \Leftrightarrow 2x - 2 > 5x + 25 \Leftrightarrow -25 - 2 > 5x - 2x \Leftrightarrow 3x < -27 \Leftrightarrow x < -\frac{27}{3} = -9$$

$$\beta) \frac{x+1}{2} > x - \frac{2x+3}{4} \Leftrightarrow 4 \frac{x+1}{2} > 4x - 4 \frac{2x+3}{4} \Leftrightarrow 2(x+1) > 4x - (2x+3) \Leftrightarrow$$

$$2x + 2 > 4x - 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - 4x + 2x > -3 - 2 \Leftrightarrow 0 > -5 \text{ αδύνατο}$$

$$21. -6 < 2 - 4x < 9 \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < 2 - 4x \\ 2 - 4x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 2 + 6 \\ 2 - 9 < 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 8 \\ 4x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < x < 2$$

$$22. \alpha) \begin{cases} -x + 5y = 9 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - 9 = x \\ 3(5y - 9) + 4y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - 9 = x \\ 15y - 27 + 4y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - 9 = x \\ 19y = 11 + 27 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 9 = 1 \\ y = \frac{38}{19} = 2 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = -3 \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = 15 \\ 6x - 9y = -3 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 0 = 12 \text{ αδύνατο}$$

$$\gamma) \text{Θέτουμε } \frac{1}{\alpha} = x \text{ και } \frac{1}{\beta} = y, \text{ τότε το σύστημα γίνεται}$$

$$\begin{cases} x + 2y = \frac{1}{6} \\ 3x + 4y = \frac{5}{6} \end{cases} \cdot (-3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6y = -\frac{3}{6} \\ 3x + 4y = \frac{5}{6} \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} -2y = \frac{2}{6} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta = -6$$

$$\text{Από την (1)} \Rightarrow 3x - \frac{4}{6} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 3x = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} \Leftrightarrow 3x = \frac{9}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

23. Επειδή η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ έχει ρίζες τα $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = -1$, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} 2^2 + 2\alpha + \beta = 0 \\ (-1)^2 + \alpha(-1) + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ -\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \xrightarrow{+} 3\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ και από} \\ (1) \Rightarrow -1 - \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = -2$$

24. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 4y = 10 \Leftrightarrow x = 5 - 2y$ και αφού το (x_0, y_0) είναι λύση, ισχύει
 ότι: $x_0 = 5 - 2y_0$. Όμως $3x_0 - y_0 = 1$, άρα
 $3(5 - 2y_0) - y_0 = 1 \Leftrightarrow 15 - 6y_0 - y_0 = 1 \Leftrightarrow -7y_0 = -14 \Leftrightarrow y_0 = 2$
 και $x_0 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$

25. Επειδή το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda x - 4y = 16 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ δέχεται σαν λύση το ζεύγος $(x, y) = (3, -1)$, είναι:

$$\begin{cases} 2\lambda \cdot 3 - 4(-1) = 16 \\ 3 + 2(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\lambda + 4 = 16 \\ 1 = 1 \text{ ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2. \text{ Τότε} \\ \begin{cases} 2x - 6y = 13 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \cdot 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = 13 \\ 24x + 6y = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 26x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ και από την (1) } y = -2.$$

26. α) Τα τρίγωνα ABK και ΔΕΛ έχουν:

1) $AB = \Delta E$

2) $B = \Gamma$ και

3) $A_1 = \Delta_1$ μισά των ίσων γωνιών Α και Δ.

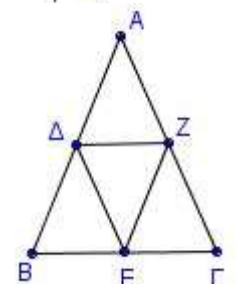
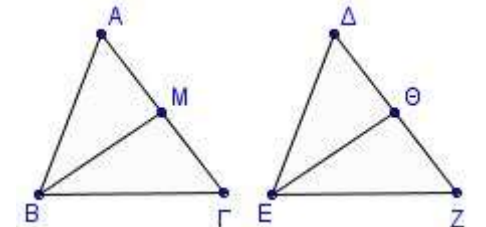
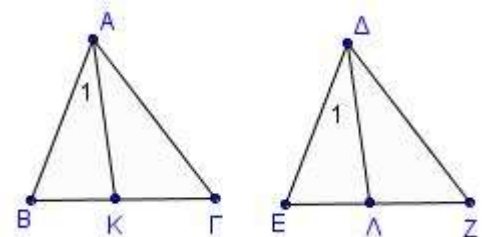
Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AK = \Delta \Lambda$.

β) Τα τρίγωνα ABM και ΔΕΘ έχουν:

1) $AB = \Delta E$ 2) $A = \Delta$ και

3) $AM = \Delta \Theta$ μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και ΔΖ.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BM = E\Theta$



27. Έδω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με $AB = AG$. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΖΕΓ έχουν:

1) $BE = EG$ γιατί το Ε είναι μέσο του ΒΓ

2) $B\Delta = \Gamma Z$ μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ και

3) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

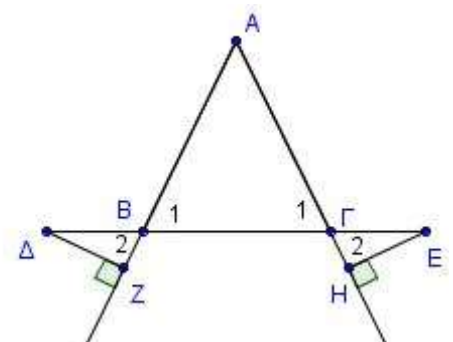
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = EZ$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

28. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΓΗ έχουν:

1) $\Delta B = \Gamma E$ και 2) $B_2 = \Gamma_2$, γιατί $B_2 = B_1$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ως κατακορυφήν

και $B_1 = \Gamma_1$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Άρα είναι και $BZ = \Gamma H$. Επειδή είναι και



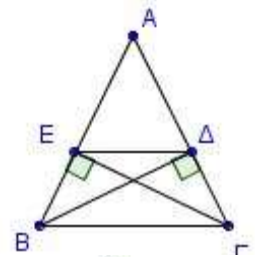
$AB = AG$, θα είναι και $AB + BZ = AG + GH \Leftrightarrow AZ = AH$, άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

29. Τα ορθογώνια τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ έχουν:

1) τη πλευρά $B\Gamma$ κοινή και

2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Άρα είναι και $BE = \Delta\Gamma$. Επειδή είναι και $AB = AG$, θα είναι και $AB - BZ = AG - GH \Leftrightarrow AE = A\Delta$, άρα το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.



30. α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ έχουν:

1) $AM = M\Delta$ 2) $BM = M\Gamma$ και 3) $M_1 = M_2$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

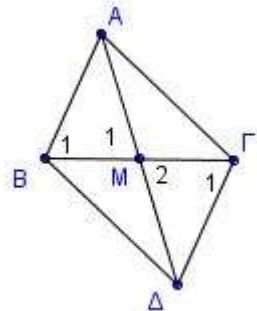
β) Επειδή τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα, έχουν και $AB = \Gamma\Delta$.

γ) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν:

1) $B\Gamma$ κοινή πλευρά 2) $AB = \Gamma\Delta$ και

3) $B_1 = \Gamma_1$ γιατί τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{A}$.

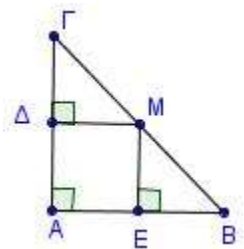


31. Τα ορθογώνια τρίγωνα $M\Delta\Gamma$ και MEB έχουν:

1) $M\Gamma = MB$ γιατί το M είναι μέσο του $B\Gamma$ και

2) $\Gamma\Delta = EB$ μισά των ίσων πλευρών AB και AG .

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα. Άρα είναι και $M\Delta = ME$.



$$32. \eta\mu 30^\circ = \frac{x}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{x}{5} = \frac{5}{5} = 1, \text{ άρα } \omega = 45^\circ$$

$$\eta\mu\omega = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y\sqrt{2} = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$33. \alpha) \sin x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin 60^\circ \quad 0^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ,$$

$$\beta) 2\eta\mu x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ \quad 0^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ \text{ ή } x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\gamma) \epsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\epsilon\varphi 30^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = \epsilon\varphi 150^\circ \quad 0^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow x = 150^\circ$$

$$34. \eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \sqrt{3}, \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\epsilon\varphi 120^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\epsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}, \epsilon\varphi 45^\circ = 1$$

$$A = \frac{\eta\mu 120^\circ + \sin 120^\circ}{2\epsilon\varphi 120^\circ + \epsilon\varphi 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{-2\sqrt{3} + 1} = \frac{\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}}{-(2\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$35. \eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

$$\text{Επειδή } 90^\circ < \omega < 180^\circ \text{ είναι } \eta\mu\omega > 0, \text{ άρα } \eta\mu\omega = \frac{\sqrt{11}}{6}, \text{ εφ}\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$36. \text{εφ}\omega = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\frac{4}{3}\sigma\nu\omega$$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}\sigma\nu\omega\right)^2 + \sigma\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{9}\sigma\nu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow 16\sigma\nu^2\omega + 9\sigma\nu^2\omega = 9 \Leftrightarrow$$

$$25\sigma\nu^2\omega = 9 \Leftrightarrow \sigma\nu^2\omega = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\nu\omega = \pm \frac{3}{5}. \text{ Επειδή } 90^\circ < \omega < 180^\circ \text{ είναι } \sigma\nu\omega < 0, \text{ άρα}$$

$$\sigma\nu\omega = -\frac{3}{5}. \text{ Τότε } \eta\mu\omega = -\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\Pi = 10\eta\mu\omega - 15\sigma\nu\omega + 12\text{εφ}\omega = 10\frac{4}{5} - 15\left(-\frac{3}{5}\right) + 12\left(-\frac{4}{3}\right) = 8 + 9 - 16 = 1.$$

$$37.\alpha) \eta\mu^4x - \sigma\nu^4x = (\eta\mu^2x - \sigma\nu^2x)(\eta\mu^2x + \sigma\nu^2x) = (\eta\mu^2x - \sigma\nu^2x) \cdot 1 =$$

$$1 - \sigma\nu^2x - \sigma\nu^2x = 1 - 2\sigma\nu^2x$$

$$\beta) \frac{1}{\sigma\nu^2x} + \frac{1}{\eta\mu^2x} = \frac{\eta\mu^2x}{\sigma\nu^2x\eta\mu^2x} + \frac{\sigma\nu^2x}{\sigma\nu^2x\eta\mu^2x} = \frac{\eta\mu^2x + \sigma\nu^2x}{\sigma\nu^2x\eta\mu^2x} = \frac{1}{\eta\mu^2x \cdot \sigma\nu^2x}$$

$$\gamma) (2\eta\mu x + 3\sigma\nu x)^2 + (3\eta\mu x - 2\sigma\nu x)^2 =$$

$$4\eta\mu^2x + 12\eta\mu x \cdot \sigma\nu x + 9\sigma\nu^2x + 4\eta\mu^2x - 12\eta\mu x \cdot \sigma\nu x + 9\sigma\nu^2x =$$

$$13\eta\mu^2x + 13\sigma\nu^2x = 13(\eta\mu^2x + \sigma\nu^2x) = 13 \cdot 1 = 13$$

$$\delta) \frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\nu\alpha} + \frac{1-\sigma\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha + (1-\sigma\nu\alpha)^2}{\eta\mu\alpha(1-\sigma\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - 2\sigma\nu\alpha + \sigma\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1-\sigma\nu\alpha)} = \frac{2-2\sigma\nu\alpha}{\eta\mu\alpha(1-\sigma\nu\alpha)} =$$

$$\frac{2(1-\sigma\nu\alpha)}{\eta\mu\alpha(1-\sigma\nu\alpha)} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$$

Στέλιος Μιχαήλογλου