

ΛΥΚΕΙΟ: _____ ΤΜΗΜΑ : _____
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^{ΟΥ} ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ (ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ)
ΟΝΟΜΑ: _____
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: _____ Α

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

(13 Μονάδες)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $2x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 5.

Σ **Λ**

β. Αν δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι 4^{ου} βαθμού, τότε και $P(x) + Q(x)$ είναι 4^{ου} βαθμού.

Σ **Λ**

γ. Η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - \beta x + 3 = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, δεν μπορεί να έχει ρίζα το 2.

Σ **Λ**

(3x4 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)=2ax^2-ax-7x+6$, έχει παράγοντα το $x-a$. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει το a .

(25 Μονάδες)

Αφού έχει παράγοντα το $x-a$ έχει ρίζα το a . Δηλαδή $P(a)=0$

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow 2aa^2 - aa - 7a + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2a^3 - a^2 - 7a + 6 = 0$$

πιθανές ρίζες $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Επειδή το άθροισμα των συντελεστών είναι 0 έχει ρίζα το 1,

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -7 & +6 & 1 \\ & 2 & 1 & -6 & \\ 2 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$2a^3 - a^2 - 7a + 6 = 0 \Leftrightarrow (a-1) \cdot (2a^2 + a - 6) = 0$$

$$a-1=0 \quad \acute{\eta} \quad 2a^2 + a - 6 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49$$

$$a_1, a_2 = \frac{-1 \pm 7}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ a_2 = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Να λύσετε την ανίσωση $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \leq 0$.
(25 Μονάδες)

Πιθανές ρίζες +1, -1

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 4 & -1 & 1 \\ & 2 & -3 & 1 & \\ 2 & -3 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (2x^2 - 3x + 1) \leq 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(x-1) \cdot (2x^2 - 3x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (x-1)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Επειδή το $(x-1)^2$ είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός η ανίσωση ισχύει για $x \leq \frac{1}{2}$ ή $x = 0$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x)=x^3+ax^2-5x+\beta$ και $Q(x)=x^3-\beta x^2+(1-5a)x-6$. Να βρεθούν τα a και β αν καθένα από αυτά έχει παράγοντα το $x-1$. Στην συνέχεια, για τις τιμές των a και β που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση: $P(x)>Q(x)$.

(2*6+13 Μονάδες)

Καλή επιτυχία!

Πρέπει $P(1)=0$ και $Q(1)=0$

$$\begin{cases} P(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + \beta \\ Q(1) = 1^3 - \beta \cdot 1^2 + (1 - 5a) \cdot 1 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a - 5 + \beta = 0 \\ 1 - \beta + 1 - 5a - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \beta = 4 \\ -5a - \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-4a = 8 \quad a = -2$$

$$-2 + \beta = 4 \quad \beta = 6$$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & +6 \\ & 1 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \parallel \parallel 1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & +11 & -6 \\ & 1 & -5 & +6 \\ 1 & -5 & +6 & 0 \end{array} \parallel \parallel 1$$

$$P(x) > Q(x) \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6) > (x-1)(x^2 - 5x + 6) \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6) - (x-1)(x^2 - 5x + 6) > 0$$

$$(x-1)[(x^2 - x - 6) - (x^2 - 5x + 6)] > 0$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6 - x^2 + 5x - 6) > 0$$

$$(x-1)(4x-12) > 0$$

$$4(x-1)(x-3) > 0$$

$$x < 1 \quad \dot{\eta} \quad x > 3$$

ΛΥΚΕΙΟ: _____

ΤΜΗΜΑ: _____

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^{ΟΥ} ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ (ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ)

ΟΝΟΜΑ: _____

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: _____ **B**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι αν η πολυωνυμική εξίσωση: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα τον ακέραιο p ($p \neq 0$), τότε ο p είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .
(13 Μονάδες)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Κάθε πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

β. Η εξίσωση $4x^4 + 6x^2 + 8x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2. Σ Λ

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 1x^2 - x + 4 = 0$ δεν έχει ρίζα το -3 .
Σ Λ

(3x 4 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = 3ax^2 - 5ax - 11x - 3$, έχει παράγοντα το $x - a$. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει το a .

(25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \geq 0$.

(25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = 3x^3 + ax^2 - (\beta + 4)x - 17$ και $Q(x) = x^3 + (a - 1)x^2 + \beta x - 2$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2$ είναι -29 και το $x = 1$ είναι ρίζα του $Q(x)$ να βρείτε τα a και β . Στην συνέχεια, για τις τιμές των a και β που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \geq Q(x)$.

(2*6+13 Μονάδες)

Καλή επιτυχία!