

Να λυθεί η κλασματική εξίσωση:

$$\frac{6}{2x-1} - \frac{5}{2x+1} = \frac{1-8x}{1-4x^2}$$

Αρχικά κάνουμε παραγοντοποίηση στους παρονομαστές για να βρούμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

$$1-4x^2 = (1-2x) \cdot (1+2x)$$

Επειδή ο πρώτος παρονομαστής είναι αντίθετος με αυτόν που είναι ο παράγοντας του γινομένου, για να τα κάνουμε ίδια βάζουμε – εκτός (μπροστά από το κλάσμα) και αλλάζουμε τα πρόσημα :

$$-\frac{6}{1-2x} - \frac{5}{2x+1} = \frac{1-8x}{(1-2x) \cdot (1+2x)}$$

$$\text{Άρα Ε.Κ.Π.} = (1-2x) \cdot (1+2x)$$

Περιορισμοί: Πρέπει:

$$(1-2x) \cdot (1+2x) \neq 0,$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad 1-2x \neq 0 \text{ και } 1+2x \neq 0,$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad 1 \neq 2x \text{ και } 1 \neq -2x,$$

$$\text{και } x \neq \frac{1}{2} \text{ και } x \neq -\frac{1}{2}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. όλους τους όρους:

$$-(1-2x) \cdot (1+2x) \frac{6}{1-2x} - (1-2x) \cdot (1+2x) \frac{5}{2x+1} = (1-2x) \cdot (1+2x) \frac{1-8x}{(1-2x) \cdot (1+2x)}$$

Κατόπιν απλοποιούμε ότι είναι ίδιο και στον αριθμητή και στον παρονομαστή:

$$-(1-2x) \cdot (1+2x) \frac{6}{1-2x} - (1-2x) \cdot (1+2x) \frac{5}{2x+1} = (1-2x) \cdot (1+2x) \frac{1-8x}{(1-2x) \cdot (1+2x)}$$

Γράφουμε τι περισσεύει:

$$-6 \cdot (1+2x) - 5 \cdot (1-2x) = 1-8x$$

κάνουμε τις πράξεις:

$$-6 - 12x - 5 + 10x = 1 - 8x,$$

$$-12x + 10x + 8x = 1 + 6 + 5,$$

$$6x = 12,$$

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

που είναι δεκτό.

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$

Παίρνουμε αρχικά περιορισμούς. Οι υπόριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

$$2x + 1 \geq 0, \quad 2x \geq -1, \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

και $x \geq 0$

συναληθεύουμε τις δύο ανισότητες: και άρα πρέπει τελικά $x \geq 0$.

Στην συνέχεια ξεχωρίζουμε τις ρίζες και υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο:

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1,$$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2,$$

$$2x + 1 = \sqrt{x}^2 + 2 \cdot \sqrt{x} + 1,$$

$$2x + 1 = x + 2 \cdot \sqrt{x} + 1,$$

$$2x - x = 2 \cdot \sqrt{x},$$

$$x = 2 \cdot \sqrt{x}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να υψώσουμε πάλι στο τετράγωνο αφού όμως πρώτα πάρουμε περιορισμούς.

Πρέπει: $x \geq 0$

Υψώνουμε πάλι στο τετράγωνο και έχουμε:

$$x = 2 \cdot \sqrt{x},$$

$$x^2 = \left(2 \cdot \sqrt{x}\right)^2,$$

$$x^2 = 4 \cdot x,$$

$$x^2 - 4 \cdot x = 0,$$

$$x \cdot (x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 4$$

που είναι και οι δύο δεκτές.