

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα οποιοδήποτε σημείο Ρ του χώρου. Να αποδειχτεί ότι: $\vec{PA} + \vec{PG} + \vec{BP} + \vec{DP} = \vec{0}$.
2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντιστοίχως και $\vec{AB} = 3\vec{a}$, και $\vec{AD} = 4\vec{b}$, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{MN}$.
3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ το μέσον της ΑΔ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{BM}$ και $\vec{MG}$, ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{BG} = \vec{b}$.
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ, τέτοια ώστε να είναι $AE = ZG = \frac{1}{4}AG$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{DE}$ και $\vec{DZ}$, ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{BG} = \vec{b}$. Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι: $\vec{AE} + \vec{AZ} = \frac{3}{2}\vec{AG}$.
6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{OB} = 5\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ και $\vec{OG} = 13\vec{a} + 7\vec{b} + 10\vec{c}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.
7. Δίνονται τα σημεία Α(3, -4) και Β(2, 1). Να βρεθεί:
i) Το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Β.
ii) Το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το Α.
8. Αν τα σημεία Δ(-1, 4), Ε(5, 4), Ζ(2, -1) είναι αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.
9. Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{a}_1 = (3, -2)$, $\vec{a}_2 = (2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta - 4)$, $\vec{a}_3 = (\alpha - 3\beta + 2, -3\alpha + 3\beta - 2)$,
i) Αν τα διανύσματα $\vec{d} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ και $\vec{v} = (-3, 4)$, είναι συγγραμμικά, να εκφραστούν οι συντεταγμένες του $\vec{d}$ ως συνάρτηση του α,
ii) Για ποια τιμή των α, β το διάνυσμα $\vec{d}$ είναι το μηδενικό.
10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (4\lambda^2 + \lambda - 2, 5\lambda^2 - \lambda + 1)$ και $\vec{b} = (\lambda^2 - \lambda - 1, 3\lambda^2 - 2\lambda + 2)$. Να βρείτε το λ ώστε: $\vec{a} = \vec{b}$. Υπάρχει τιμή του λ ώστε: $\vec{a} = -\vec{b}$;
11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 2)$ και $\vec{b} = (3, -2)$. Να υπολογιστούν τα: $|-2\vec{a}|$ και $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.
12. Αν $\vec{a} = (\lambda, \lambda + 1)$, να υπολογιστούν οι τιμές του λ ώστε: $|-3\vec{a}| = 15$.
13. Αν Α(-2, 1), Β(3, -2) και $2\vec{AM} - 3\vec{BM} = \vec{0}$, να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του Μ.
14. Δίνονται τα σημεία Α(-2, -2), Β(3, 0), Γ(-1, 3). Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και τα μήκη των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.
15. Δίνονται τα σημεία Α(-1, 2), και Β(-3, 0). Να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου Οxy τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

16. Δίνονται σημεία A(-2, -5) και B(3, -4). Να βρείτε σημείο Γ του άξονα x'x τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά AB.
17. Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(3, -2), B(-2, 3) και Γ(0, 4), είναι ορθογώνιο και να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του.
18. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία A(1, 1) και B(4, 2). Να βρείτε ένα σημείο M του άξονα x'x τέτοιο ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M.
19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2\lambda + 1, -2)$, $\vec{\beta} = (1, 2)$, $\vec{\gamma} = (\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα λ και μ ώστε $\vec{a} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.
20. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου A (1, 2) και B (4, 1). Να βρείτε σημείο M του άξονα x'x τέτοιο ώστε:
- Το τρίγωνο MAB να είναι:
 - ισοσκελές με κορυφή το σημείο M,
 - ορθογώνιο στο M,
 - ορθογώνιο στο M και ισοσκελές,
 - το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του σημείου M από τα A και B να γίνεται ελάχιστο.
21. Να βρείτε σημείο M (x, y) του επιπέδου τέτοιο ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του από τα σημεία A (1, 5), B (5, -2) και Γ (-3, -3) να είναι ελάχιστο.
22. Να βρείτε: **i)** Όλα τα διανύσματα του επιπέδου τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{a} = (3, -4)$ και έχουν ίσο μέτρο με αυτό.
ii) Όλα τα διανύσματα του επιπέδου τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (-2, 1)$ και έχουν μέτρο ίσο $\sqrt{5}$.
iii) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (x, y)$ του επιπέδου το οποίο σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα x'x και έχει μέτρο ίσο με $10\sqrt{3}$.
23. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αν:
- $|\vec{a}| = 5, |\vec{\beta}| = 7, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$
 - $|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{\beta}| = \frac{2}{3}, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$.
24. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, και η γεωμετρική τους γωνία στις παρακάτω περιπτώσεις:
- $\vec{a} = (-5, 3), \vec{\beta} = (6, 10)$,
 - $\vec{a} = (2, \sqrt{3}), \vec{\beta} = (-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,
 - $\vec{a} = (0, 2), \vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.
25. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια ώστε: $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 5, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta} = 5\vec{a} - 4\vec{\beta}$, να υπολογιστεί το $|\vec{\delta}|$.

26. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια ώστε: $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$, να υπολογιστούν οι γωνίες: $(\vec{\delta}, \vec{a})$ και $(\vec{\delta}, \vec{\beta})$.
27. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$, να δείξετε ότι: το $\vec{a}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$, και ότι: το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.
28. Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, τρία μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, με: $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$, και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$. Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
29. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = (1, 3)$ και $\vec{AI} = (3, 1)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$ της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας A του τριγώνου.
30. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{a} = (5, 4)$ σε δύο συνιστώσες μία παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (2, 5)$ και μία κάθετη σ' αυτό.
31. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2x - 1, x + 1)$ και $\vec{\beta} = (x + 1, 2x + 3)$.
- Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
 - $\vec{a} \perp \vec{\beta}$,
 - $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2$
 - Για την μεγαλύτερη από τις τιμές του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{a}$ και να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{a}$ στο $\vec{\beta}$.
32. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \rho$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $(\vec{a} + \vec{\beta}, \vec{a} - \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$, να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό ρ .
33. Δίνονται οι γωνίες $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 45^\circ$ και $(\vec{a}, \vec{\gamma}) = 120^\circ$ και $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων: $\vec{x} = \vec{a} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{y} = \vec{\beta} - 2\vec{a} - \vec{\gamma}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $|3\vec{a} - 2\lambda\vec{\beta}| > |\lambda\vec{\gamma} - \vec{\beta}|$.
34. Αν $\vec{a} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.
35. Αν $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$, πάνω στο διάνυσμα $\vec{a}$.
36. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και κάθετα, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$, πάνω στο διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$.
37. Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -3)$, να υπολογιστεί το $|\text{προβ}_{\vec{a}}(2\vec{a} - \vec{\beta})|$.

38. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}=(1, 3)$ και $\vec{\beta}=(-1, -4)$ και $\vec{v}=(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} - 2\vec{a}$, να βρείτε την $\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$.
39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{\beta}=(x-1)\vec{i}+(y-2)\vec{j}$, $\vec{\gamma}=4x\vec{i}+(x-1)\vec{j}$, $\vec{\delta}=y\vec{i}+(2-y)\vec{j}$. Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\delta}$.
40. Τα σημεία A, B, Γ, Δ έχουν, ως προς την αρχή O, των αξόνων διανύσματα θέσης (2, 5), (4, 10), (-6, -15) και (-16, λ-15), $\lambda \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{AB} \perp \vec{\Gamma\Delta}$.
41. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-2, 3)$ και $\vec{v}=(4, -3)$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{w}$ που είναι κάθετο στο $3\vec{u}-5\vec{v}$.
42. Αν $\vec{a}=((x-1)\sqrt{3}, 2x)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3}, 1)$ να υπολογιστεί το x ώστε $(\vec{a}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$.
43. Αν είναι $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}$ και $\vec{\beta}=-8\vec{i}+6\vec{j}$,
 ι) Να δείξετε ότι η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι αμβλεία,
 ιι) Να βρείτε το μήκος της προβολής του $\vec{\beta}$, πάνω στο $\vec{a}$.
44. Να υπολογιστεί η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{a}=(1, 2-\sqrt{3})$, $\vec{\beta}=(1, 1)$.
45. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{\beta}=(-3\text{syn}\theta)\vec{i}+(3\eta\mu\theta)\vec{j}$, $\vec{\gamma}=-\vec{i}+\vec{j}$.
 Α. Για ποιες τιμές του $\theta \in (0, \pi)$ τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.
 Β. Αν τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{4}$, να δείξετε ότι $\text{syn}\theta=1-\eta\mu\theta$.
46. Δίνονται τα διανύσματα του επιπέδου $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:
 $(\vec{a}+3\vec{\beta}) \perp (7\vec{a}-5\vec{\beta})$ και $(\vec{a}-4\vec{\beta}) \perp (7\vec{a}-2\vec{\beta})$.
 ι) Να δείξετε ότι: $\vec{\beta}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{a}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{\beta}$,
 ιι) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.
47. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=\kappa\vec{i}+\lambda\vec{j}$, $\vec{\beta}=(\kappa-\lambda)\vec{i}+(\kappa+\lambda)\vec{j}$, $\vec{\gamma}=(\kappa+25)\vec{i}+5\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(2\kappa+\lambda-5)\vec{i}+(\kappa-1)\vec{j}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$,
 α) Αν $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\vec{\gamma} \uparrow \downarrow \vec{\delta}$,
 β) Αν τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, όχι συγγραμμικά να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν.