

ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΕΥΘΕΙΑ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας λέγεται η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x' , δηλ $\lambda = \tan \omega$, με $0 \leq \omega < 180^\circ$.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ δίνεται από την σχέση: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από την σχέση: $y - y_1 = \lambda_{AB}(x - x_1)$ όπου $\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, με $x_1 \neq x_2$, οπότε η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη και ο

συντελεστής διεύθυνσής της ορίζεται.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- Η οριζόντια ευθεία είναι παράλληλη στον x' , έχει συντελεστή διεύθυνσης 0 και έχει εξίσωση $y = y_0$.
- Η κατακόρυφη ευθεία είναι παράλληλη στον y' ο συντελεστής διεύθυνσης της δεν ορίζεται και έχει εξίσωση $x = x_0$.
- Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση $y = \lambda x$, σχηματίζει με τον x' οξεία γωνία όταν $\lambda > 0$ και αμβλεία γωνία όταν $\lambda < 0$.
- Ειδικότερα οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων έχουν εξισώσεις: $y = x$ και $y = -x$
- Η ευθεία που είναι παράλληλη στην $x = \lambda x$ και τέμνει τον y' στο σημείο $B(0, \beta)$ έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$.

Γενικά η εξίσωση της ευθείας είναι: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, δηλαδή οι συντελεστές των x και y δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ με γνωστές συντεταγμένες από μια ευθεία με γνωστή

εξίσωση δίνεται από τον τύπο: $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Προσοχή:

- Για να εφαρμοστεί ο τύπος θα πρέπει η εξίσωση της ευθείας να είναι στην γενική μορφή της.
- Η απόσταση σημείου από ευθεία είναι πάντα θετικός αριθμός ή 0.
- Αν είναι μηδέν, σημαίνει ότι το σημείο ανήκει στην ευθεία (το σημείο είναι σημείο της ευθείας και άρα επαληθεύει την εξίσωσή της).

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το εμβαδόν ενός τριγώνου όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του δίνεται από

τον τύπο: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{B\Gamma})|$.

Προσοχή:

- Το εμβαδόν τριγώνου είναι πάντα θετικός αριθμός ή μηδέν.
- Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 0 τότε έχουμε την συνθήκη παραλληλίας, τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα και τα τρία σημεία είναι συνευθειακά.
- Στην θέση των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$, μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε 2 από τα 6 διανύσματα που ορίζονται με άκρα τα σημεία A, B και Γ .

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

- Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα το $\vec{\delta}_1 = (B, -A)$.
- Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα το $\vec{\delta}_2 = (A, B)$.

Με την βοήθεια των παράλληλων και κάθετων διανυσμάτων μπορούμε να μεταφερθούμε από τις ευθείες, στα διανύσματα και με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου, να βρούμε γωνίες διανυσμάτων ή τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ – ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας χρειαζόμαστε, ένα σημείο της και τον συντελεστή διεύθυνσής (ή δύο σημεία της).

Ο συντελεστής διεύθυνσης μπορεί να δίνεται έμμεσα:

- Αν η ευθεία που ζητάμε είναι παράλληλη σε άλλη δοσμένη ευθεία οπότε $\lambda_1 = \lambda_2$,
- Αν είναι κάθετη σε άλλη δοσμένη ευθεία οπότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$,
- Αν περνάει από δύο σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, οπότε $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, με $x_1 \neq x_2$
- Αν σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα xx' οπότε $\lambda = \tan \omega$.

Παράδειγμα: Άσκηση 2 σελίδα 69 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 3y + 6 = 0$ (1). Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών;

Λύση:

Αφού έχουμε ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ζητούμενη ευθεία χρειαζόμαστε ακόμα τον συντελεστή διεύθυνσής της ή ένα ακόμα σημείο της. Αφού έχουμε και την ευθεία (1) με την οποία είναι κάθετη θα υπολογίσουμε τον συντελεστή διεύθυνσής της. Βρίσκουμε πρώτα τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (1) λύνοντας την εξίσωση ως προς y οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ο συντελεστής του x .

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Αφού η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην (1) θα πρέπει το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης να ισούται με -1 . Δηλ.

$$\lambda \cdot \frac{2}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}. \text{ Οπότε από τον γνωστό τύπο η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας θα είναι:}$$

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - (-2)) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{3}{2}x - 3 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x.$$

Για το σημείο τομής των δύο ευθειών θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ 2x - 3(-\frac{3}{2}x) + 6 = 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ 2x + \frac{9}{2}x = -6 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \\ \text{ευθειών} & & & \\ \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ \frac{13}{2}x = -6 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ x = -\frac{12}{13} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}(-\frac{12}{13}) \\ x = -\frac{12}{13} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{18}{13} \\ x = -\frac{12}{13} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Άρα το κοινό σημείο των δύο εξισώσεων είναι το $(-\frac{12}{13}, \frac{18}{13})$.

- Το σημείο της ευθείας αν δεν είναι δοσμένο, μπορεί να είναι:

- Το σημείο τομής άλλων γραμμών, οπότε θα προκύψει από την λύση του συστήματος των εξισώσεών τους,
- Ένα σημείο που θα προκύψει μετά την εκτέλεση κάποιων πράξεων, για παράδειγμα μπορεί να είναι το κέντρο κάποιου κύκλου, οι συντεταγμένες κάποιου διανύσματος, ή το σημείο τομής της ευθείας με κάποιον από τους άξονες.

Παράδειγμα: Άσκηση 3 σελίδα 69 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x - 5y + 3 = 0$ και $x - 3y - 7 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + y = 1$.

Λύση:

Καταρχήν λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών, για να βρούμε ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ζητούμενη ευθεία.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ -2x + 6y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 17 = 0 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -17 \\ x - 3(-17) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -17 \\ x + 51 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -17 \\ x = -44 \end{cases}$$

άρα το κοινό σημείο των δύο ευθειών είναι το $(-44, -17)$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της δοσμένης ευθείας (λύνουμε ως προς y οπότε ο συντελεστής είναι ο συντελεστής του x) $y = -4x + 1$,

οπότε πρέπει $\lambda \cdot (-4) = -1$ και άρα $\lambda = \frac{1}{4}$, και επομένως σύμφωνα με τον τύπο η ευθεία θα έχει

$$\text{εξίσωση: } y - (-17) = \frac{1}{4}(x - (-44)) \Leftrightarrow y + 17 = \frac{1}{4}(x + 44) \Leftrightarrow y + 17 = \frac{1}{4}x + 11 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - 6.$$

- **Για να κάνουμε την γραφική παράσταση** ευθειών, συνήθως βρίσκουμε:

- ο δύο σημεία των ευθειών αυτών,
- ο ή ένα σημείο τους και προς ποια άλλη ευθεία, η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη.

Για τα δύο σημεία δίνουμε τυχαίες τιμές στο x και βρίσκουμε το αντίστοιχο y . Προτιμούμε τιμές για τις οποίες προκύπτουν ακέραιες τιμές, για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στο σχήμα.

Πολλές φορές μας ζητά η άσκηση ή μας βολεύει να βρούμε τα σημεία στα οποία η ευθεία (η γενικότερα μια γραμμή) τέμνει τους άξονες. Για τον σκοπό αυτό:

- ο θέτουμε όπου x το 0 και λύνοντας εξίσωση ως προς y βρίσκουμε το σημείο $(0, y_0)$ που είναι σημείο του άξονα yy' .
- ο Στην συνέχεια θέτουμε όπου y το 0 και λύνοντας εξίσωση ως προς x βρίσκουμε το σημείο $(x_0, 0)$ που είναι σημείο του άξονα xx' .

- Στις περιπτώσεις που ψάχνουμε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από δεδομένο σημείο και έχει κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες, π.χ. σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με γνωστό εμβαδόν ή ισοσκελές τρίγωνο ή τέμνει κάποιες άλλες ευθείες, θεωρούμε ότι η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ (δηλαδή ό,τι ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της και η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη), οπότε η ευθεία είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Τα λ και β προσδιορίζονται από τα δεδομένα της άσκησης.

Προσοχή:

Στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να ελέγχουμε αν η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο, επαληθεύει τα δεδομένα της άσκησης και άρα αν είναι και αυτή ή μόνο αυτή λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα: Άσκηση 3 σελίδα 75 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $M(1, 2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4 τετραγωνικές μονάδες.

Λύση:

Ξεκινώντας θεωρούμε γνωστό τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας έστω λ . Το λ ορίζεται και είναι διαφορετικό του 0 γιατί η ζητούμενη ευθεία αποκλείεται να είναι οριζόντια ($//$ στον xx') ή κατακόρυφη ($//$ στον yy') γιατί σ' αυτήν την περίπτωση δεν θα έτεμνε τους άξονες οπότε δεν θα σχηματίζονταν τρίγωνο. Αφού διέρχεται από το $M(1, 2)$ θα έχει εξίσωση: $y - 2 = \lambda(x - 1)$ (1). Στην συνέχεια βρίσκουμε τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες, δηλαδή τις κορυφές του τριγώνου.

Για $y=0$ έχουμε ότι: $x = \frac{\lambda - 2}{\lambda}$ δηλαδή το σημείο A του άξονα των xx' έχει συντεταγμένες

$$A\left(\frac{\lambda - 2}{\lambda}, 0\right)$$

Για $x=0$ έχουμε ότι: $y = 2 - \lambda$, δηλαδή το σημείο B του άξονα yy' έχει συντεταγμένες $B(0, 2 - \lambda)$.

$$\text{Οπότε } E=(OAB)=\frac{1}{2} B.u=\frac{1}{2} (OA)(OB)=\frac{1}{2} \left| \frac{\lambda-2}{\lambda} \right| |2-\lambda| = \frac{(\lambda-2)^2}{|2\lambda|}.$$

$$\text{Αφού } E=4, \text{ πρέπει: } 4=\frac{(\lambda-2)^2}{|2\lambda|} \Leftrightarrow (\lambda-2)^2=8|\lambda|.$$

Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις:

$$\text{Αν } \lambda > 0 \text{ τότε: } (\lambda-2)^2=8\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=8\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-12\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=6 \pm 4\sqrt{2}$$

$$\text{Αν } \lambda < 0 \text{ τότε: } (\lambda-2)^2=-8\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=-8\lambda \Leftrightarrow \lambda^2+4\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξισώσεις: $y-2=(6+4\sqrt{2})(x-1)$, $y-2=(6-4\sqrt{2})(x-1)$ και $y-2=-2(x-1)$ και μετά τις πράξεις γίνονται: $y=(6+4\sqrt{2})x-4-4\sqrt{2}$, $y=(6-4\sqrt{2})x-4+4\sqrt{2}$ και $y=-2x+4$

- **Για να βρούμε την εξίσωση της διχοτόμου μιας γωνίας**, που ξέρουμε τις εξισώσεις των πλευρών της ε_1 και ε_2 βρίσκουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της δηλαδή από τις ευθείες ε_1 και ε_2 .

Παράδειγμα: Άσκηση 8, σελίδα 76 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x-4y+1=0$ και $5x+12y+4=0$.

Λύση:

Επειδή είναι γνωστό, ότι κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της διχοτόμου οπότε θα πρέπει να έχει ίσες αποστάσεις από

$$\begin{aligned} \text{κάθε μία από τις δύο ευθείες, δηλαδή: } d(M, \varepsilon_1)=d(M, \varepsilon_2) &\Leftrightarrow \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|5x+12y+4|}{\sqrt{5^2+12^2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{|3x-4y+1|}{5} = \frac{|5x+12y+4|}{13} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13(3x-4y+1) = 5(5x+12y+4) \\ 13(3x-4y+1) = -5(5x+12y+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 39x-52y+13 = 25x+60y+20 \\ 39x-52y+13 = -25x-60y-20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x-112y-7=0 \\ 64x+8y+33=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-16y-1=0 \\ 64x+8y+33=0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε, ότι οι δύο ευθείες είναι κάθετες και είναι οι διχοτόμοι των δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που σχηματίζουν οι δύο τεμνόμενες ευθείες.

- **Για να βρούμε την γωνία που σχηματίζουν δύο ευθείες $\varepsilon_1: a_1x+\beta_1y+\gamma_1=0$, και $\varepsilon_2: a_2x+\beta_2y+\gamma_2=0$, βρίσκουμε τα διανύσματα $\vec{a}=(\beta_1, -a_1)/\varepsilon_1$ και $\vec{\beta}=(\beta_2, -a_2)/\varepsilon_2$ που είναι παράλληλα προς κάθε μία ευθεία και στην συνέχεια υπολογίζουμε την γωνία των δύο διανυσμάτων, σύμφωνα με τον τύπο**

$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|} = \frac{a_1 \cdot a_2 + \beta_1 \cdot \beta_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} = \kappa,$$

- Αν $\kappa > 0$ τότε οι δύο ευθείες σχηματίζουν οξεία γωνία
- Αν $\kappa < 0$ τότε οι δύο ευθείες σχηματίζουν αμβλεία γωνία.

Παράδειγμα: Άσκηση 4 σελίδα 70 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: y=mx$ και $\varepsilon_2: (1+\mu)x=(1-\mu)y$.

Λύση:

Καταρχήν γράφουμε τις εξισώσεις των ευθειών στην γενική τους μορφής φέρνοντας όλους τους όρους σε ένα μέλος και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων, όπου χρειάζεται. Έτσι οι

δεδομένες εξισώσεις γίνονται: $\mu x - y = 0$ και $(1+\mu)x + (\mu-1)y = 0$, από όπου προκύπτει ότι: $\varepsilon_1 // \vec{\delta}_1 = (1, \mu)$ και $\varepsilon_2 // \vec{\delta}_2 = (1 - \mu, 1 + \mu)$, άρα

$$\text{συνφ} = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{1(1-\mu) + \mu(1+\mu)}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \sqrt{(1-\mu)^2 + (1+\mu)^2}}$$

$$\frac{1 - \mu + \mu + \mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2} \sqrt{2(1 + \mu^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η γωνία των δύο διανυσμάτων ισούται με 45° .

- **Μεσοπαράλληλη ευθεία δύο ευθειών** λέγεται η ευθεία που είναι παράλληλη προς αυτές και ισαπέχει από αυτές. Για να βρούμε την μεσοπαράλληλη ευθεία δύο ευθειών, βρίσκουμε την απόστασή τους, παίρνοντας ένα σημείο της μιας και βρίσκοντας την απόστασή του από την άλλη ευθεία. Στην συνέχεια η μεσοπαράλληλη θα είναι της ίδια μορφής με τις αρχικές και η απόσταση του ίδιου σημείου της μιας ευθείας θα ισούται με το μισό της απόστασης των δύο ευθειών.

Παράδειγμα:

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 3x+4y+6=0$ και $\varepsilon_2: 3x+4y+16=0$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 .

Λύση:

Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες αφού οι συντελεστές των x και y είναι ανάλογοι (ίδιοι). Θεωρούμε σημείο της ε_1 . Για $y=0$ η ε_1 δίνει $3x=-6$, άρα $x=-2$, δηλαδή έχουμε το σημείο $A(-2, 0)$

της ε_1 . Η απόστασή του από την ε_2 είναι: $d(A, \varepsilon_2) = \frac{|3(-2) + 4 \cdot 0 + 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-6 + 16|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$.

Η μεσοπαράλληλη, ε των ε_1 και ε_2 θα είναι της μορφής $3x+4y+\beta=0$, και θα πρέπει το σημείο $A(-2, 0)$ της ε_1 να απέχει από την μεσοπαράλληλη απόσταση ίση με 1 (το μισό της απόστασης

$$\text{των δύο ευθειών}). \text{ Δηλαδή: } d(A, \varepsilon) = \frac{|3(-2) + 4 \cdot 0 + \beta|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|-6 + \beta|}{5} = 1 \Leftrightarrow |-6 + \beta| = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 + \beta = 5 \\ -6 + \beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 11 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτουν δύο παράλληλες προς τις αρχικές ευθείες, οι: $3x+4y+1=0$ και $3x+4y+11=0$. Από αυτές μεσοπαράλληλη είναι η $3x+4y+11=0$, αφού $1 < 6 < 11 < 16$.

- Για να δείξουμε **ότι μια οικογένεια ευθειών διέρχονται από το ίδιο σημείο** υπάρχουν δύο τρόποι:

α) Δίνουμε δύο τιμές στην παράμετρο λ . Επιλέγουμε δηλαδή έτσι δύο από τις ευθείες της οικογένειας. Προσδιορίζουμε το κοινό σημείο K των δύο αυτών ευθειών, λύνοντας το σύστημα που προκύπτει και ελέγχουμε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της οικογένειας.

β) Υποθέτουμε σημείο $K(x, y)$ της ευθείας και αναδιατάσσουμε τους όρους της εξίσωσης της οικογένειας ώστε να έχουμε στο πρώτο μέλος πολυώνυμο ως προς λ και στο δεύτερο μέλος το μηδέν. Επειδή το πολυώνυμο πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν για κάθε λ , συμπεραίνουμε ότι είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Εξισώνουμε τους συντελεστές του, με το μηδέν και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει για τα x και y .

Παράδειγμα: Άσκηση 2 σελίδα 70 σχολικού βιβλίου

Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής: $(1) (2\alpha^2 + \alpha + 3)x + (\alpha^2 - \alpha + 1)y + (3\alpha + 1) = 0$, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση:

Καταρχήν παρατηρούμε ότι το a^2-a+1 , ο συντελεστής του y είναι τριώνυμο ως προς a με $\Delta=(-1)^2-4 \cdot 1 \cdot 1=-3<0$, άρα δεν έχει ρίζες και επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του a .

A) Σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο δίνουμε δύο τιμές στο a (επιλέγουμε τιμές που δίνουν εύκολες πράξεις).

Για $a=0$, η (1) γίνεται: $3x+y+1=0$.

Για $a=1$, η (1) γίνεται: $6x+y+4=0$.

$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 6x + y + 4 = 0 \end{cases} \cdot (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - y - 1 = 0 \\ 6x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{Λύνοντας το σύστημα έχουμε: } \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-1) + y + 1 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Άρα όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο $A(-1, 2)$.

Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την γενική μορφή της ευθείας:

$(2a^2+a+3)(-1)+(a^2-a+1)2+(3a+1)=-2a^2-a-3+2a^2-2a+2+3a+1=0$, ισχύει άρα το σημείο A είναι κοινό για όλες τις ευθείες της οικογένειας.

B) Σύμφωνα με τον δεύτερο τρόπο κάνουμε τις πράξεις και αναδιατάσσουμε τους όρους δημιουργώντας τριώνυμο ως προς a . (1) $\Leftrightarrow (2a^2+a+3)x+(a^2-a+1)y+(3a+1)=0 \Leftrightarrow (2x+y)a^2+(x-y+3)a+(3x+y+1)=0$. (2)

Η σχέση (2) τώρα είναι τριώνυμο ως προς a και για να ισχύει θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 2x + 3 = 0 \\ 3x - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x + 3 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

- **Για να βρούμε την προβολή ενός σημείου πάνω σε μία δεδομένη ευθεία** βρίσκουμε την κάθετη από το σημείο στην ευθεία (έχοντας γνωστό τον συντελεστή διεύθυνσης αφού οι ευθείες είναι κάθετες) και στην συνέχεια λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που προκύπτει, βρίσκουμε το κοινό τους σημείο, που είναι η προβολή του σημείου στην ευθεία. Την ίδια δουλειά κάνουμε και όταν θέλουμε να βρούμε **το συμμετρικό ενός σημείου ως προς μια ευθεία**. Αλλά συνεχίζοντας βρίσκουμε τις συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου, θεωρώντας την προβολή σαν μέσον του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα δύο σημεία.

Παράδειγμα: Άσκηση 6 σελίδα 70 σχολικού βιβλίου

Δίνεται η ευθεία $3x+y=3$ και το σημείο $A(1, 2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του A πάνω στην ευθεία και στην συνέχεια τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου A ως προς την ευθεία.

Λύση:

Η δεδομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-3$, άρα η κάθετη έχει $\lambda=\frac{1}{3}$ και έχει εξίσωση:

$$y-2=\frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}+2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}.$$

Οι συντεταγμένες της προβολής προκύπτουν από την λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 3 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{3}x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{27}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Άρα η προβολή του Α στην ευθεία είναι το σημείο $M(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$.

Τώρα για τις συντεταγμένες του συμμετρικού Β του σημείου Α ως προς την ευθεία θα πρέπει το Μ να είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, δηλαδή:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{1 + x_B}{2} \Leftrightarrow 5 + 5x_B = 4 \Leftrightarrow 5x_B = -1 \Leftrightarrow x_B = -\frac{1}{5}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{5} = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow 10 + 5y_B = 18 \Leftrightarrow 5y_B = 8 \Leftrightarrow y_B = \frac{8}{5}$$

Επομένως το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία είναι το σημείο Β $(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$