

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ**ΔΙΑΖΕΥΞΗΣ**

Σε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να σημειώσετε Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη).

Α.

1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ενώνει τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

2. Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = a\vec{i} + \beta\vec{j}$ $\Sigma \quad \Lambda$

3. Ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο προς μια ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα xx' την ίδια γωνία που σχηματίζει και η ε . $\Sigma \quad \Lambda$

4. Το παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, -B)$. $\Sigma \quad \Lambda$

5. Οι τετμημένες δύο σημείων που ορίζουν ευθεία παράλληλη προς τον άξονα yy' είναι ίσες. $\Sigma \quad \Lambda$

Β.

1. Αν δύο σημεία A και B έχουν ίσες τετμημένες και άλλα δύο σημεία Γ και Δ έχουν ίσες τεταγμένες, τότε η ευθεία AB είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$. $\Sigma \quad \Lambda$

2. Η απόσταση σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad \Sigma \quad \Lambda$$

3. Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$. $\Sigma \quad \Lambda$

4. Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{i} + \lambda\vec{j}$. $\Sigma \quad \Lambda$

5. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει στο επίπεδο ευθεία γραμμή. $\Sigma \quad \Lambda$

Γ.

1. Η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (\mu^2 - 5\mu + 6)y + 4 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, παριστάνει πάντα ευθεία. $\Sigma \quad \Lambda$

2. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, 3)$ είναι $\parallel$ στην ευθεία $3x + y - 4 = 0$. $\Sigma \quad \Lambda$

3. Μία ευθεία κάθετη στον yy' έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$. $\Sigma \quad \Lambda$

4. Η ευθεία $2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. $\Sigma \quad \Lambda$

5. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = -x + 2$ και $\varepsilon_2: y = x + 4$ είναι κάθετες. $\Sigma \quad \Lambda$

6. Η $3x + 5y - 2 = 0$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα xx' . $\Sigma \quad \Lambda$

ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Το κάθετο διάνυσμα προς την ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι το:

Α. $\vec{\delta} = (-A, B)$, **Β.** $\vec{\delta} = (-B, A)$, **Γ.** $\vec{\delta} = (A, -B)$, **Δ.** $\vec{\delta} = (A, B)$, **Ε.** $\vec{\delta} = (B, -A)$.

2. Η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ έχει εξίσωση:

$$\text{Α. } y - y_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (x - x_1), \quad \text{Β. } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), \quad \text{Γ. } y - y_2 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (x - x_2),$$

$$\text{Δ. } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (y - y_2), \quad \text{Ε. } y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

3. Η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(y_0, x_0)$ με $x_0, y_0 > 0$ είναι κάθετη προς:

Α. Τον άξονα xx' ,

Β. Τον άξονα yy' ,

Γ. Την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων,
Δ. Την διχοτόμο της δεύτερης και τέταρτης γωνίας των αξόνων,
Ε. Την ευθεία με εξίσωση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

4. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' έχει εξίσωση:

Α. $x=x_0$, Β. $x=y_0$, Γ. $y=y_0$, Δ. $x=-x_0$, Ε. $y=-y_0$.

5. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' όταν:

Α. $A=0$, Β. $B=0$, Γ. $\Gamma=0$, Δ. $B=\Gamma=0$, Ε. $A=\Gamma=0$.

6. Αν μία ευθεία σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία $\omega > 90^\circ$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι:

Α. $\lambda > 0$, Β. $\lambda < 0$, Γ. Δεν ορίζεται, Δ. $\lambda > 1$, Ε. $\lambda < 1$.

7. Οι ευθείες με εξισώσεις $Ax+By+\Gamma=0$ και $Bx+Ay+\Gamma=0$, με $A \neq B \neq 0$:

Α. είναι παράλληλες Β. είναι κάθετες, Γ. Τέμνονται σε ένα σημείο, Δ. Συμπίπτουν.

8. Α. Δίνεται η ευθεία (ε): $(\lambda^2+9)x+(\lambda^2-4\lambda+3)y+\lambda+\frac{3}{2}=0$. Ποια η σωστή απάντηση στις επόμενες

ερωτήσεις:

α) Η (ε) διέρχεται από το σημείο $M(-1, 1)$, όταν το λ ισούται με:

Α. $-\frac{3}{2}$, Β. 2, Γ. 1, Δ. $\frac{2}{3}$, Ε. $\frac{1}{5}$.

β) Η (ε) είναι // στον yy' , όταν το λ ισούται με:

Α. 2, Β. -3, Γ. 3, Δ. 4, Ε. 0

γ) Η (ε) είναι // στην $y=-x+1$, όταν το λ ισούται με:

Α. -1, Β. $-\frac{2}{3}$, Γ. $-\frac{3}{2}$, Δ. $\frac{2}{3}$, Ε. 2.

δ) Το διάνυσμα $\vec{n}=(3, 4)$ είναι κάθετο στην (ε) όταν το λ ισούται με:

Α. 2, Β. 8, Γ. $\frac{1}{2}$, Δ. -3, Ε. -1.

Β. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της ίδιας μορφής με την (ε), διέρχονται από το ίδιο σημείο και να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου αυτού.

9. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της πρώτης στήλης με μια ευθεία της δεύτερης στήλης στην οποία το διάνυσμα να είναι κάθετο.

Στήλη Α	Στήλη Β
Διάνυσμα	Ευθεία
$\eta_1=(0,-1)$	$\epsilon_1: 3x-5y+2=0$
$\eta_2=(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	$\epsilon_2: y=-2$
$\eta_3=(5,0)$	$\epsilon_3: -\frac{3}{2}x+5y=0$
$\eta_4=(2,4)$	$\epsilon_4: x+2y-1=0$
	$\epsilon_5: x=7$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να βρεθεί ποιες από τις γραμμές που έχουν εξισώσεις:

i) $2x-3y=0$,

ii) $x^2+y^2-2x+3y=0$,

iii) $x^2+y^2+6x-2y+1=0$, διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

2. Να βρείτε την γωνία ω που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που ορίζονται από τα σημεία:

i) $(-8, -4)$, $(5, 9)$,

iii) $(5, -7)$, $(5, -2)$,

iv) $(3, 7)$, $(5, 7)$.

3. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι παράλληλες προς το διάνυσμα:

i) $\vec{\delta} = (4, -5)$,

ii) $B\vec{\Gamma}$ με άκρα $B(-3, 4)$ και $\Gamma(-1, 5)$.

4. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τις κορυφές $A(2, -1)$, $B(4, -5)$ και $\Gamma(-3, 4)$ τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών τριγώνου $AB\Gamma$ που έχει κορυφές $A(-5, 4)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(-3, -2)$.

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $A(-2, 0)$ και είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση: $y=3x-1$.

8. Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία, $A(-1, 2)$ και $B(3, -2)$.

9. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{3}{4}$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 24 τ. μονάδες.

10. Δίνονται οι εξισώσεις $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ δύο πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και η κορυφή του $A(2, -3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών του, τις κορυφές και το εμβαδόν του.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών: $2x-3y+5=0$ και $4x-6y+9=0$.

12. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(5, -4)$ ως προς την ευθεία $4x-3y+2=0$.

13. Δίνονται οι εξισώσεις: $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ δύο πλευρών ενός παραλληλογράμμου και η εξίσωση $3x+2y+3=0$ μιας διαγωνίου του. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

14. Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 8 τ.μ. και οι δύο κορυφές του A και B έχουν συντεταγμένες $(1, -2)$, και $(2, 3)$ αντιστοίχως. Η τρίτη κορυφή του Γ είναι σημείο της ευθείας $2x+y-2=0$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ .

15. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των παράλληλων ευθειών, $\epsilon_1: ax+by+\gamma_1=0$ και $\epsilon_2: ax+by+\gamma_2=0$ είναι ίση

με: $\frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Δύο πλευρές ενός τετραγώνου βρίσκονται στις ευθείες με εξισώσεις: $5x-12y-65=0$ και

$5x-12y+26=0$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραγώνου.

16. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το σημείο $M(1, 4)$ και τέμνει τις ευθείες $\epsilon_1: y=-x+4$ και $\epsilon_2: y=2x+3$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι ώστε το M να είναι το μέσον του AB .

17. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες με την ευθεία $\varepsilon: 3x-4y+12=0$ και απέχουν από το σημείο $A(2, 1)$ απόσταση ίση με 1.
18. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $\varepsilon: x+y-1=0$ που απέχουν από την ευθεία $\zeta: 3x+4y-2=0$ απόσταση ίση με 2.
19. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ του οποίου η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(2, 3)$ το ύψος AD έχει εξίσωση $3x-5y+6=0$ και η διάμεσος AM εξίσωση: $x-11y+2=0$.
20. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$. Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι $x-2y+1=0$, και το ύψος του BD έχει εξίσωση $x+2y+3=0$, να βρείτε τις κορυφές B και Γ .
21. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$ και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις: $y=3$ και $2x-y+1=0$. Να βρείτε τις κορυφές B και Γ .
22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθόκεντρο το σημείο $H(1, 3)$. Αν οι εξισώσεις των πλευρών του AB και $A\Gamma$ είναι $x+y-3=0$ και $y=2x$ αντίστοιχα να βρείτε τις κορυφές του A και B .
23. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB: y=3x$ και $A\Gamma: x-y+2=0$. Αν το σημείο $M(1, 2)$ είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
24. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$ και $B(-1, 0)$. Αν η εξίσωση της διχοτόμου AD είναι $y=2x$, Να βρείτε:
α) Το συμμετρικό σημείο του B ως προς την ευθεία AD ,
β) Την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$.
25. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$ και ορθόκεντρο $H(3, 0)$ και βαρύκεντρο $\Theta(1, 4)$. Να βρείτε: **α)** Το μέσον M της πλευράς $B\Gamma$,
β) Την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
26. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ευθείες: $\varepsilon_1: x+\mu y+1=0$ και $\varepsilon_2: 2\mu x+2y+\lambda=0$, είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.
27. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^2+y^2+2xy-3x-3y+2=0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στην συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραapeζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.
28. Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.
i) Να δείξετε ότι ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$,
ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του AB , $A\Gamma$,
iii) Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών BD και GE ,
iv) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου H ,
v) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου H από την πλευρά $A\Gamma$.
29. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $M(2, 3)$ όταν:
α) Το M είναι το μέσον του AB όπου τα A και B είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες xx' και yy' αντίστοιχα,
β) Σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\frac{3}{2}$.
30. Να διατάξετε με φθίνουσα σειρά τις αποστάσεις των σημείων $A(2, 5)$, $B(-3, -6)$, $\Gamma(-1, 4)$ από την ευθεία $4x-3y=0$.

31. Να δείξετε ότι η γραμμή με εξίσωση $(2\mu^2\alpha)x + (2\sigma\mu^2\alpha)y + \sigma\mu^2\alpha - 1 = 0$ (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in (0, \pi)$. Βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1).
32. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = yx$.
- α) Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες, έστω ε_1 και ε_2 , που τέμνονται στην αρχή των αξόνων,
 - β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 ,
 - γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2 .
33. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\beta - 1, \alpha + 1)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν το σημείο $P(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία $x + y - 2 = 0$.
34. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση ευθείας $(2\lambda^2 + \lambda + 1)x - (\lambda^2 - \lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0$, όπου $\lambda \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 19\}$, παριστάνει πορεία 20 πλοίων που κατευθύνονται σε κάποιο λιμάνι.
- α) Να βρεθεί η θέση του λιμανιού,
 - β) Ανοικτά του λιμανιού στο σημείο $(1, 2)$ υπάρχει φάρος που δεν λειτουργεί. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση κάποιο από τα πλοία να συγκρουστεί με τον φάρο,
 - γ) Εξετάστε αν κάποιο από τα 20 πλοία κινείται παράλληλα με μικρό σκάφος που κινείται στην ίδια περιοχή και του οποίου η πορεία δίνεται από την εξίσωση: $11x - 3y - 22 = 0$.
35. Στην πόλη των Μαθηματικών οι δρόμοι που έχουν εξίσωση: $(3\lambda + 1)x + 2(\lambda - 1)y + 7\lambda + 5 = 0$, περνούν από την πλατεία της γνώσης.
- i) Να δείξετε ότι οι δρόμοι της εξίσωσης (1) είναι ευθείες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες της πλατείας της γνώσης (η πλατεία θεωρείται ως σημείο),
 - ii) Να βρείτε τους δρόμους της εξίσωσης (1) που είναι παράλληλοι στον x' ,
 - iii) Αν ο δρόμος των συναντήσεων έχει εξίσωση της μορφής (1) και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$, να βρεθεί η εξίσωση του δρόμου αυτού.
36. Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου είναι τοποθετημένο στο επίπεδο xOy έτσι ώστε η μεσαία γραμμή να είναι τμήμα της ευθείας $\varepsilon: 4x - 3y + 10 = 0$. Αν το σημείο του πέναλτι στην μία περιοχή, έχει συντεταγμένες $(20, -20)$ τότε:
- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που γίνεται η έναρξη του αγώνα,
 - ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου του πέναλτι στην άλλη περιοχή.
37. Δίνονται οι εξισώσεις: $(\varepsilon_1) (\kappa - 2)x - \kappa y = -2$ και $(\varepsilon_2) (\kappa + 1)x + (\kappa^2 - 4)y = -3$, με κ πραγματικό αριθμό.
- α) Να αποδειχτεί ότι είναι εξισώσεις ευθειών,
 - β) Να βρεθεί το κ ώστε να είναι κάθετες.
38. Οι συντεταγμένες ενός πλοίου κάθε χρονική στιγμή είναι $\Pi(2t + 20, t + 40)$, $t \geq 0$. Το πλοίο ξεκινά από το λιμάνι Λ την χρονική στιγμή $t = 0$ με προορισμό προς το λιμάνι O , όπου O είναι η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού επιπέδου.
- α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Λ ,
 - β) Να βρεθεί η απόσταση των δύο λιμανιών,
 - γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοίου σε σχέση με τον προορισμό του,
 - δ) Ποιο σημείο της πορείας του πλοίου απέχει από τον τελικό προορισμό την μικρότερη απόσταση και ποια είναι αυτή;
39. Σε έναν αγώνα αυτοκινήτων δύο κινητά βρίσκονται κάθε χρονική στιγμή t στα σημεία $K_1(t, t + 4)$, $K_2(1 - 2t, t + 1)$, $t \geq 0$.
- α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο κινητών την χρονική στιγμή $t = 2$,
 - β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο κινητά,
 - γ) Την χρονική στιγμή $t = 1$, να βρεθεί η απόσταση του K_1 από την τροχιά του K_2 .

40. Έστω τα σημεία A (0, -4) και B (3, 0). Να βρεθεί αν υπάρχουν οι ευθείες που περνάνε από το A και απέχουν από το B απόσταση: **α)** $d=3$, **β)** την μέγιστη απόσταση, **γ)** $d=6$.

41. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2-3xy+2y^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες.

42. Να βρείτε την σχετική θέση των ευθειών: $\varepsilon_1: \mu x-y=\mu-2$ και $\varepsilon_2: 3x-y=1$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in R$.

Για ποια τιμή του $\mu \in R$ η ευθεία ε_2 σχηματίζει με την ε_1 γωνία ίση με: **α)** $\frac{\pi}{2}$, και **β)** $\frac{\pi}{4}$.