

Η προτεραιότητα των πράξεων

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό a και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $n \geq 2$ συμβολίζεται με a^n και είναι το γινόμενο (n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a).

Δηλαδή $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n - \text{παράγοντες}}$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \quad \text{με} \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{με} \quad a \neq 0$$

Ιδιότητες

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x .

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7, \quad \sqrt{7^2} = 7$$

$$\text{Αν } x \geq 0, \text{ τότε } (\sqrt{x})^2 = x$$

Για αριθμούς a και b θετικούς ισχύει:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{με} \quad b > 0$$

Γενικά:

Αν a, b είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

Να γίνουν οι πράξεις:

$A = 2^3 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 - 2^{-2} \cdot 4 + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2}\right] \cdot 8 =$	$B = \frac{(-2)^3 + 2^2 + (-1)^{12}}{4^{-2} - 2^{-3} + \left[(-2)^3\right]^{-1}} =$
$F = \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}$	$\Delta = \sqrt{32} - 5\sqrt{18} + 7\sqrt{8} - 2\sqrt{50}.$

2. Ομοίως:

$(2x^2y)^2 \cdot (3x^3y) =$	$(-a^2x^3)^4 \cdot (ax^2)^3 =$
$(-2ab\gamma)^3 : (a^2b^3\gamma^4) =$	$(8\beta^2\gamma^3)^2 : (16\beta^4\gamma^6) =$

3. Αν $A(x) = 3x^2 + 2x - 7$ $B(x) = -5x^2 + x + 4$ και να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A(x) + B(x) =$	$A(x) - B(x) =$
$2A(x) - 3B(x) =$	$2x \cdot A(x) - 3x^2 \cdot B(x) =$

$(x - 1) \cdot A(x) =$	$(2x^2 - 1) \cdot B(x) =$
$A(x) \cdot B(x) =$	

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

α) Τετράγωνο αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
β) Τετράγωνο διαφοράς	$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
γ) Κύβος αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
δ) Κύβος διαφοράς	$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
ε) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά	$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
ζ) Διαφορά κύβων	$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
η) Άθροισμα κύβων	$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$
$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha.$	

Ασκήσεις 1,2,4,5,6 σελ 49 και 10,11,12,13,14,15 σελ 50 και να αποδείξετε τις ισότητες:

$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
$(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1) = 4x$

$(x^2 + 1)^2 - x^2 \cdot (x^2 + 2) = 1$
$(2a - 3)^2 - 4 \cdot (a + 1)^2 = 5 - 20a$

Και να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$(2x + \dots)^2 = \dots + 4xy + \dots$	$(\dots - \dots)^2 = 9a^2 - 19ab + \dots$
$(x - \dots)^2 = \dots - \frac{3}{2}x + \dots$	$\left(\frac{a}{2} + \dots\right)^2 = \dots + \alpha + \dots$

Περιπτώσεις Παραγοντοποίησης	
α) Κοινός παράγοντας	$3\alpha + 3\beta - 3\gamma = 3(\alpha + \beta - \gamma).$
β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)	$\underbrace{ax + ay}_{\text{}} + \underbrace{2x + 2y}_{\text{}} = a(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(a + 2)$
γ) Διαφορά τετραγώνων	$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
δ) Διαφορά - άθροισμα κύβων	$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής	$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$

Παραγοντοποίηση: η μετατροπή ενός γινομένου ή μιας διαφοράς σε γινόμενο. Την χρειαζόμαστε όταν θέλουμε να λύσουμε μια εξίσωση ή να απλοποιήσουμε κλασματικές παραστάσεις. Υπάρχουν διάφορες **απλές περιπτώσεις παραγοντοποίησης και ο συνδυασμός τους**

Ασκήσεις 1,2,3,4,5,,7,9,12, 13,15,16, 19, 20, 21, 22, 23 σελ 61 και 62.

Και τις παρακάτω:

$3x^2y - 2xy^2 =$	$14x^3 - 21x^2 =$
$12a^2b^3\gamma - 15a^3b =$	$18x^5 - 9x^4 + 3x^2 =$
$(x + 2)^2 + x^2 + 2x =$	$(5x - 3)^2 - 10x^2 + 6x =$
$4(2x - 1)^2 \cdot (3x - 2) - (4x - 2) \cdot (2 - 3x)^2 =$	
$2x^3 - 6x^2 + 3x - 9 =$	$5x^2 - 20 =$
$50x^3 - 8x =$	$49x^2 - (3x - 2)^2 =$

$(5x - 2)^2 - (3x - 4)^2 =$	$x^2 + 6x + 9 =$
$49x^2 - 14x + 1 =$	$8x^4 - 8x^3 + 2x^2 =$
$x^2 - 6x + 9 + (x - 3) \cdot (2x - 1) =$	
$x^2 - y^2 + 2y - 1 =$	$\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha - 1 =$
$(x^2 + x + 1)^2 - x^2 =$	
$(2x - 3) \cdot (3x - 1) - 4x^2 + 12x - 9 =$	

Το ΕΚΠ χρησιμοποιείται για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κλασματικές παραστάσεις και όταν θέλουμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Ο ΜΚΔ χρησιμοποιείται για να απλοποιήσουμε κλασματικές παραστάσεις

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Ασκήσεις, 1,2,3,4,5,σελ 74

Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Μια αλγεβρική παράσταση (π.χ. $\frac{x^3 + 4}{x - 1}$, $\frac{xyw}{x + y}$, $\frac{2}{x^2 + 4}$) που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα,

λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**. Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

Για παράδειγμα, η παράσταση $\frac{x^3 + 4}{x - 1}$ ορίζεται, αν $x \neq 1$.

Τις αντιμετωπίζουμε όπως τα κλάσματα, και οι πράξεις που κάνουμε: απλοποιήσεις όπου διαιρούμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον ΜΚΔ τους, πολλαπλασιασμοί διαιρέσεις όπου στο τέλος καλό είναι να γίνουν οι απλοποιήσεις και τέλος προσθέσεις και αφαιρέσεις όπου πρέπει τα κλάσματα να γίνουν ομώνυμα βρίσκοντας το ΕΚΠ των παρονομαστών αφού πρώτα έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων.

Ασκήσεις σελ 74, 77, 80, 81 και επίσης, να γίνουν οι πράξεις:

$\frac{3x + 6}{x^2} \cdot \frac{5x}{x + 3} =$	$\frac{a^2 - 9}{\beta} \cdot \frac{\beta^3 + \beta^2}{\beta \cdot a + 3\beta} =$
$\frac{3 \cdot x - 6}{a - b} \cdot \frac{b - a}{4 - 2 \cdot x} =$	$\frac{x^2 - 4}{6a^3} : \frac{5 \cdot x + 10}{4a} =$
$\frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 5x + 4} : \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 3x + 2} =$	
$\frac{5 - x}{x + 5} \cdot \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25} =$	
$\frac{3a}{x^2 - ax} - \frac{2a}{3x - 3a} =$	

$\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{1}{a - 1} =$	
$\frac{1}{a^2 - 6a + 9} - \frac{1}{a^2 - 5a + 6} =$	

Και να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$\frac{x^3 y^2}{x^3 y^3 w} =$	$\frac{7x^2 y w}{28x^3 y w^2} =$
$\frac{x^2 - 2x - 15}{3x^2 - 12x - 15} =$	

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

- Αν $\Delta > 0$, έχει **δύο άνισες λύσεις** τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν $\Delta = 0$, έχει **μία διπλή λύση** την $x = -\frac{\beta}{2a}$
- Αν $\Delta < 0$, **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$x^2 + 3x - 4 = 0$	
--------------------	--

$(x - 3)^2 = 4x - 15$	
$5x(x - 4) = (x - 5) \cdot (x + 5)$	

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Ανισότητες ανισώσεις με έναν άγνωστο

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ ενώ Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο πραγματικούς αριθμούς α και β , που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha - \beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν.

- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$
- Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
- Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

Ιδιότητες της διάταξης

α) Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

β) Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha\gamma > \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$

γ) Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

δ) Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

και η μεταβατική ιδιότητα:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma \text{ τότε } \alpha > \gamma$$

ε) Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

$$\text{Αν } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με } \alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \text{ τότε } \alpha\gamma > \beta\delta$$

Για οποιονδήποτε αριθμό α ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Ασκήσεις σελ 116-117

Αν $\alpha > \beta$ και α, β ομόσημοι τότε: $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1-x}{2} < x \\ 1 - \frac{4-x}{4} \geq \frac{x+4}{8} \end{cases}$$

Γραμμικά συστήματα

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y ,

π.χ. $x + y = 5$ και $2x + y = 8$

και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y** .

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$$

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς τον
έναν άγνωστο έστω τον x , $x=20-y$

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

$$\begin{aligned} (20 - y) + 3y &= 44 & 20 + 2y &= 44 & 2y &= 44 - 20 \\ 2y &= 24 & \text{άρα } y &= 12 \end{aligned}$$

- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Για $y=12$, έχουμε $x=20-12$, άρα $x=8$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι
 $(x,y)=(8, 12)$

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο x , πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το -2 και της δεύτερης με το 3 , οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 3 \end{array} \quad \text{ñ} \quad \begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases}$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

$$\begin{aligned} -\cancel{6x} - 10y + \cancel{6x} + 21y &= -2 + 24 \\ 11y &= 22, \text{ οπότε } y = 2 \end{aligned}$$

- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

Αφού $y = 2$, η εξίσωση $3x + 5y = 1$ γράφεται: $3x + 5 \cdot 2 = 17$ ή $3x + 10 = 1$
 $3x = -9$ ή $x = -3$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -3$, $y = 2$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-3, 2)$

Παραδείγματα και ασκήσεις σελ. 135, 136, 137

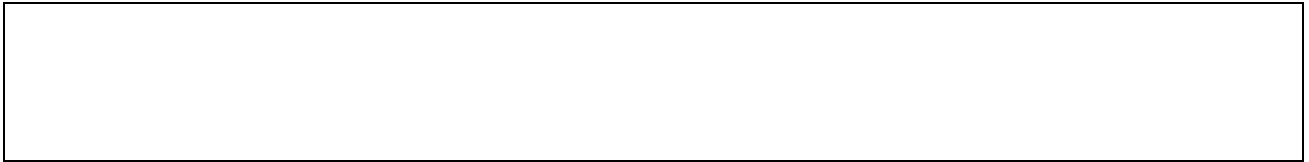
Και επίσης να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = 8 - \frac{y-1}{3} \\ \frac{y+1}{2} = 9 - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = \frac{7}{6} \\ \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = \frac{17}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 24 \end{cases}$$



Ισότητα τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρνουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή

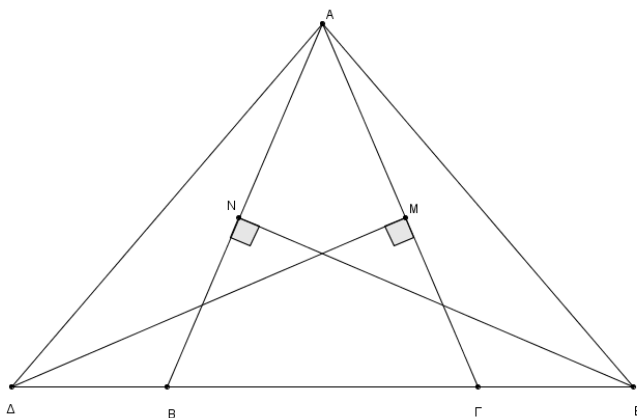
Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

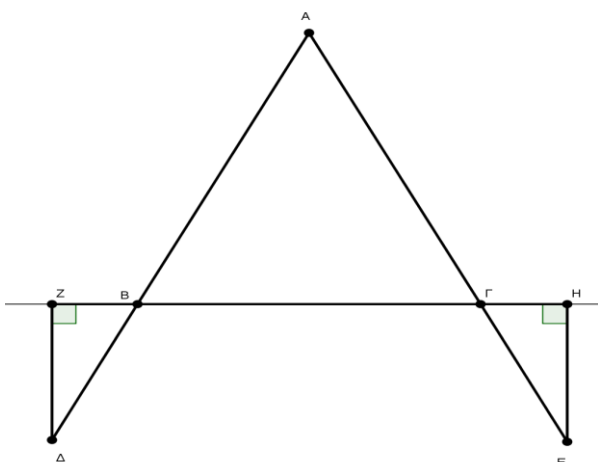
Αποδεικνύεται ακόμη ότι :

Κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου της.

Ασκήσεις σελ 193, 194, 195, 196 και επίσης να λυθούν οι ασκήσεις:



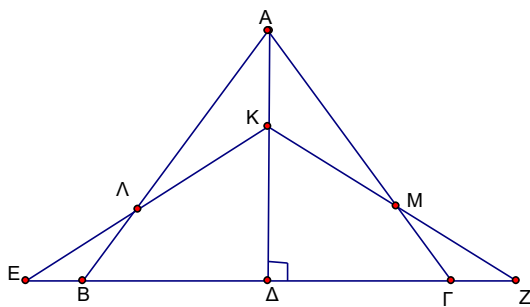
Στα παρακάτω σχήματα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και στην ευθεία $B\Gamma$ και εκτός του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία Δ και E ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Φέρουμε $\Delta M \perp A\Gamma$ και $EN \perp AB$ να δείξετε ότι $\Delta M = EN$.



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) (σχήμα). Προεκτείνουμε τις AB και $A\Gamma$ κατά ίσα τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Φέρνουμε $\Delta Z \perp \epsilon$ και $EH \perp \epsilon$, όπου ϵ είναι η ευθεία της $B\Gamma$.

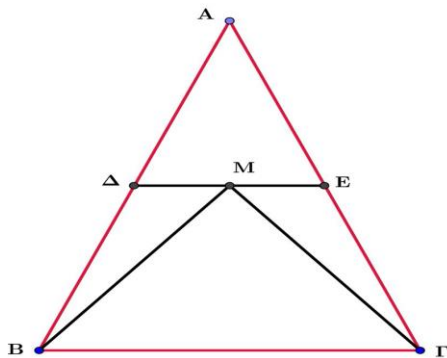
Να αποδείξετε ότι :

- 1) Τα τρίγωνα $BZ\Delta$ και $\Gamma H E$ είναι ίσα.
- 2) Τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από την ευθεία (ϵ) της $B\Gamma$.
- 3) Οι γωνίες $\widehat{B\Delta Z}$ και $\widehat{\Gamma A H}$ είναι ίσες. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές;



Στο διπλανό σχήμα: το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$, το AD είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, δίνεται $BE=GZ$ και το K τυχαίο σημείο του AD .

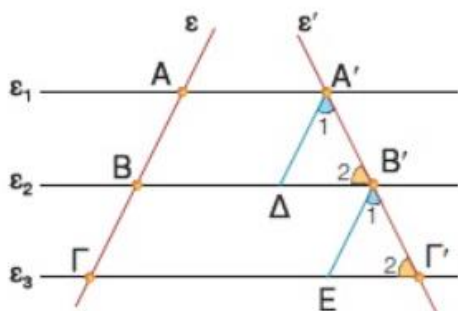
1) Να αποδείξετε ότι $ED = \Delta Z$, 2) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KEZ είναι ισοσκελές. 3) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΛEB και MGZ είναι ίσα.



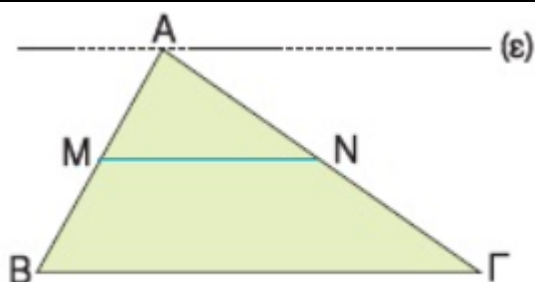
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Τα σημεία Δ , E , M είναι τα μέσα των AB , AG , ΔE αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

- i) Το τρίγωνο ΛDE είναι ισοσκελές.
- ii) Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $ME\Gamma$ είναι ίσα

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών



Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α , γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

τμήματα β , δ , όταν ισχύει

Ιδιότητες των αναλογιών

Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\delta = \beta\gamma$$

Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία

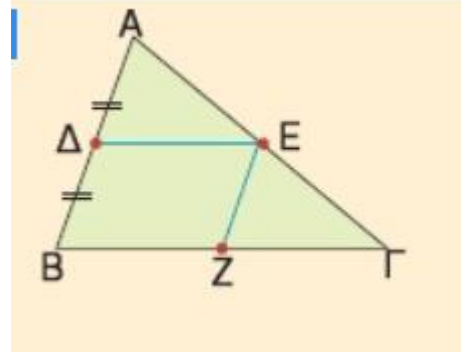
$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι:
α) Ζ το μέσον της πλευράς ΒΓ

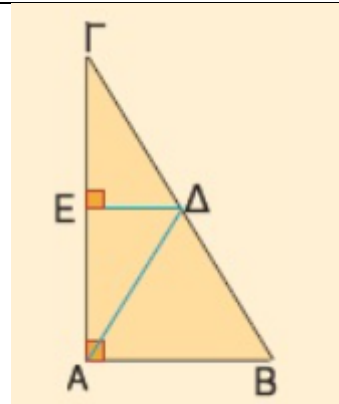
$$\beta) \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$$



Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

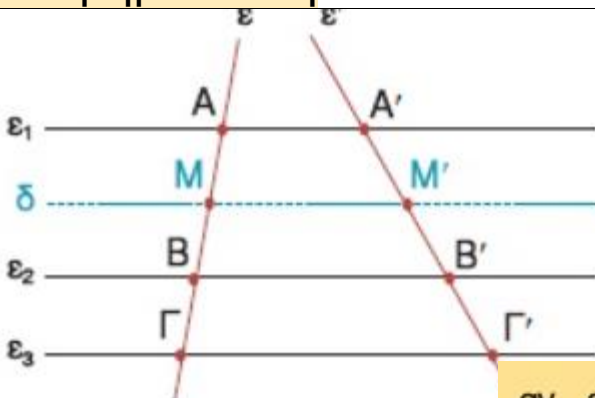
Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΔΕ // ΑΒ, να αποδειχτεί ότι: α) Ε μέσο της πλευράς ΑΓβ)

$$A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$$



Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Θεώρημα Θαλή



Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

$$\text{αν } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Ασκήσεις σελίδες 208 και 209

Όμοια πολύγωνα

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Όμοια τρίγωνα

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες ή τις γωνίες τους ίσες τότε είναι όμοια. Για τις γωνίες, αρκεί να έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια.

Εφαρμογή 2 σελ 221 και ασκήσεις σελ 221, 222, 223

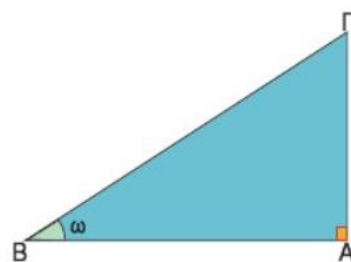
Τριγωνομετρία

Θυμόμαστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

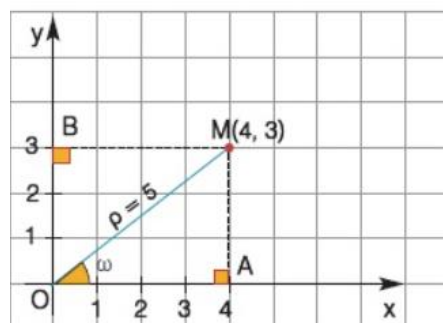


Γενικεύουμε αυτούς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς για οποιαδήποτε γωνία οξεία ορθή αμβλεία, μεταφέροντας αυτό το ορθογώνιο τρίγωνο πάνω στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$$



Αποδεικνύεται με την βοήθεια της ομοιότητας των τριγώνων, ότι το σημείο M, μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο πάνω στην ημιευθεία OM, με αρχή το σημείο O που περιστρέφεται με φορά αντίθετη από τους

δείκτες του ρολογιού γύρω από το O ξεκινώντας από τον ημιάξονα Oχ. Οπότε έχουμε:

$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{\rho}$	όπου
$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{\rho}$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$	

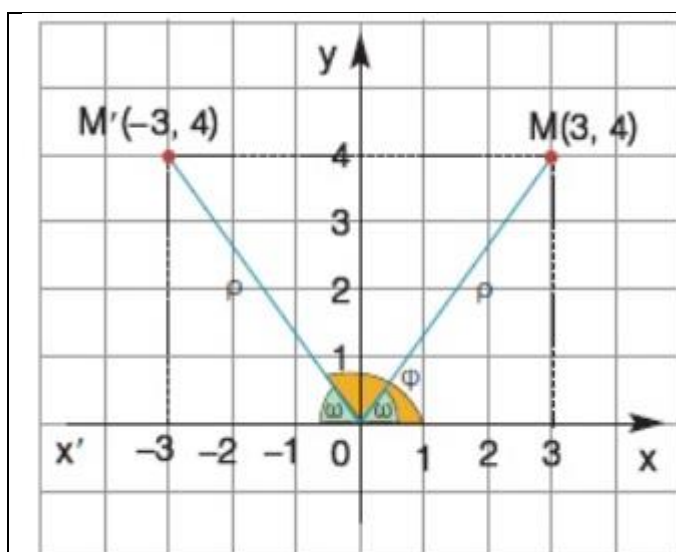
Γενικά ισχύει:

- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε είναι $x>0, y>0, \rho>0$, οπότε: $\eta\mu\omega>0, \sigma\upsilon\nu\omega>0, \epsilon\phi\omega>0$.
- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι $x<0, y>0, \rho>0$, οπότε: $\eta\mu\omega>0, \sigma\upsilon\nu\omega<0, \epsilon\phi\omega<0$.

Καλό είναι να θυμόμαστε:

ω	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\eta\mu\omega$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$	0	-1
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---	0

Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών



Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο M(3, 4) και βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο M'(-3, 4) ως προς τον άξονα y'y. Αν ονομάσουμε ω τη γωνία x'OM, τότε λόγω συμμετρίας είναι x'OM' = ω , οπότε για τη γωνία $\phi = x'OM'$ ισχύει $\phi = 180^\circ - \omega$, που σημαίνει ότι οι γωνίες ω και ϕ είναι παραπληρωματικές, αφού $\omega + \phi = 180^\circ$. Έχουμε ακόμη ότι $\rho = OM = OM' = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, οπότε:

$$\eta\mu\omega = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{4}{3} \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\phi = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\phi = -\frac{3}{5}, \quad \epsilon\phi\phi = -\frac{4}{3}.$$

Οι παραπληρωματικές γωνίες ω , $\varphi = 180^\circ - \omega$ έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$

Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ή τριγωνομετρικές ταυτότητες.

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Ασκήσεις σελίδα 242 243

Νόμος ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

και Νόμος συνημίτονων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

Σε κάθε τρίγωνο το τετράγωνο κάθε πλευράς του, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών και επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους.

Ασκήσεις σελ 249, 250.