

ΛΥΚΕΙΟ:.....

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

3^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (μέχρι και ακρότατα)

ΟΝΟΜΑ:.....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΘΕΜΑ Α

A1 Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$. **(7 Μονάδες)**

A2 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σ ή Λ ανάλογα με το αν είναι σωστές ή λανθασμένες.

1. Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της, χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
Σ Λ
2. Υπάρχει συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, που η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα xx' και δεν ισχύει η σχέση $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Σ Λ
3. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
Σ Λ
4. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f είναι πάντα μικρότερο από ένα τοπικό της μέγιστο.
Σ Λ
5. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνμικής συνάρτησης περιττού βαθμού τέμνει οπωσδήποτε τον άξονα xx' .
Σ Λ

(5x2 Μονάδες)

A3 Θεωρούμε τον ισχυρισμό: Υπάρχουν συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού A για τις οποίες ισχύει: $f(x)g(x)=0$, για κάθε $x \in A$ αλλά δεν ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x \in A$, ή $g(x)=0$ για κάθε $x \in A$.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή γράφοντας Α ή Ψ αντίστοιχα.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(1+3 Μονάδες)

A4 Να γράψετε το κριτήριο παρεμβολής για τις συναρτήσεις f, g, h . **(6 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 0 \\ \beta x - x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ για την οποία εφαρμόζεται το

θεώρημα μέσης τιμής στο $[-1, 1]$.

B1 Να δείξετε ότι $a=1$ και $\beta=0$.

(6 Μονάδες)

B2 Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(6 Μονάδες)

B3 Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

(6 Μονάδες)

B4 Υλικό σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x>0$, και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1cm/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M όταν διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

(7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$

Γ1 Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(5 Μονάδες)

Γ2 Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(5 Μονάδες)

Γ3 Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=k$,

(4 Μονάδες)

Γ4 Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(6 Μονάδες)

Γ5 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει: $e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$, να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ cm. Ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB=x$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο και έστω θ η γωνία που σχηματίζει η διαγώνιος $A\Gamma$ με την πλευρά AB .

Δ1 Να δείξετε ότι η επιφάνεια Ω μεταξύ του ορθογωνίου και του κύκλου έχει εμβαδόν που δίνεται από την συνάρτηση:

$$E(x) = 2\pi - x \cdot \sqrt{8 - x^2}, \quad 0 < x < 2\sqrt{2}.$$

(6 Μονάδες)

Δ2 Να δείξετε ότι η επιφάνεια Ω έχει ελάχιστο εμβαδόν όταν το $AB\Gamma\Delta$ γίνει τετράγωνο.

(6 Μονάδες)

Δ3 Έστω ότι η πλευρά x του ορθογωνίου αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ , όταν $x=2$ cm.

(7 Μονάδες)

Δ4 Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} \frac{\eta\mu\theta}{8 - x^2}$ και $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta\mu\theta} \cdot \left(\frac{1}{\theta} - \sigma\phi\theta \right) \right]$.

(6 Μονάδες)

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!