

**Θέματα
πανελλαδικών εξετάσεων
1983-2020**



Στέλιος Μιχαήλογλου

Συναρτήσεις – Όρια

1. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1}, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \mu x + \alpha \sigma \nu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

1986

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$. Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

1989

3. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x), x \in \mathbb{R}$

1998

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$.

α) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

β) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

γ) Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος B) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2000

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x - 1}, & x < 1 \\ \alpha x - 2\alpha + 3, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Εσπερινά 2000

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

2002

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sigma \nu x, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$.

β) Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha = \beta = 3$.

2007

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

2006

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax-1}{x+1}$, $x \neq -1$, όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

Αν $a=3$ τότε:

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Ομογενείς 2016

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x+a)^2 - 1$, $x \in [-1, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $a = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1} .

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $x \in [-1, +\infty)$, τότε:

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x)+1}{(f^{-1} \circ g)(x)}$, όπου $(f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2020

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + a$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $a = \beta = -1$.

β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}.$$

δ) Έστω η συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$ (μονάδες 3).

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$

2020

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες.

γ) Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right)$

2020

Ορισμός παραγώγου – Κανόνες παραγωγίσισης

13. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

1988

14. Δίνεται συνάρτηση g ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(-1) = 7$. Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(x) = 3(x-2)^2 g(2x-5)$, να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε το $f''(2)$.

1990

15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0)$

1991

16. A. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη παράγωγο της συνάρτησης

$$F(x) = [f(x)]^x, x \in \mathbb{R}.$$

B. Να βρείτε τη παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = a^{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}, a > 0$

1991

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \ln \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

A. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

B. Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1992

18. A. Έστω ρ πραγματικός αριθμός, $A(x), B(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ τέτοιο, ώστε $A(x)B(x) = (x - \rho)^2 f(x)$, αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$

B. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(x) = x^\nu (\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$.

1994

19. A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{ax}, a \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου a έτσι ώστε να ισχύει: $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Έστω $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ με $\beta_1 \neq \beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \lambda e^{\beta_1 x} + \mu e^{\beta_2 x}, x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = g'(x_0) = 0$. Να αποδειχθεί ότι $\lambda = \mu = 0$.

1996

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu^2(ax), x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του a ώστε να ισχύει: $f''(x) + 4a^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1999

Εφαρμογή

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + x + 3, x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0,3)$.

1985

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 1, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\left(1, \frac{23}{6}\right)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο τομής της εφαπτομένης αυτής με τον άξονα $x'x$.

1986

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρία σημεία A, B, Γ της C_f τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες στον $x'x$. Να αποδείξετε ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

1987

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9x - 12, x \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη C_f και η εφαπτομένη της C_f στο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης -3 .

1987

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη και τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy .

1989

25. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5.$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

γ) Αν $h(x) = e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

2000

26. Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$. Έστω $c > 2000$ και έστω ότι η ευθεία $y = c$ και η C_f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία A, B του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B είναι κάθετες μεταξύ τους.

2000

27. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -\frac{1}{9}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

2001

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι:

i. συνεχής στο $x_0 = 1$ ii. παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, 1)$.

Εσπερινά 2008

29. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha < 0 < \beta$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = 5\beta$ και $f(\beta) = 5\alpha$, να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

β) Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 5y - 2010 = 0$.

γ) Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.

Εσπερινά 2010

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha, & x < 1 \\ (x - \beta)^2, & x \geq 1 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 2\beta = \alpha$ και ότι $\alpha \geq 1$.

β) Αν $-1 \leq \alpha \leq 1$, να αποδείξετε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$.

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε τα α και β .

δ) Αν $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$ να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$.

Εσπερινά 2012

Ρυθμός μεταβολής

31. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 2\text{m/sec}$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $s(t) = vt$, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος σε sec.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου t .

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m;

1993

32. Έστω ότι $f(t)$ είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή $t \geq 0$ και $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση με

$$f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}. \text{ Να βρεθεί η χρονική στιγμή } t_1 \text{ κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του}$$

αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορρόφησης τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

1996

33. Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν $g(x) = M_0 + M(1 - e^{-\mu x})$, $x \geq 0$ όπου M_0, M και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(x)$. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0 ;

1998

34. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t) = 2t + \mu$, $t \in \mathbb{R}$, όπου η παράμετρος μ είναι πραγματικός αριθμός.

Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές με τον τύπο

$$E(t) = (t - 1)\varphi(t), \quad t \geq 0, \text{ όπου } t \text{ συμβολίζει το χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας } K(t) \text{ της}$$

επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια ευρώ με τον τύπο: $K(t) = \varphi(t + 4)$, $t \geq 0$.

- α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$ για $t \geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημία δώδεκα εκατομμυρίων ευρώ.
 β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;
 γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

1998

35. Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10$, $1 < x < 5$

- α) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή.
 β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $x_1 = 2$ και για $x_2 = 4$ (δηλαδή για 2.000 στροφές ανά λεπτό και 4.000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα).

Εσπερινά 2000

Θ.Rolle – Θ.M.T.– Συνέπειες Θ.M.T

36. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b) = 0$. Να αποδειχθεί ότι:

- A. για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{x - c}$ όπου $c \in [a, b]$, υπάρχει $c_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.
 B. υπάρχει $c_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραφικής παράστασης της f , διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

1983

37. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , για τις οποίες ισχύουν:

- είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
- $f'' = g''$

- $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$

Ναδειχθεί ότι:

- A. Για κάθε $x \in \Delta$ $f(x) - g(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$
 B. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$

1989

38. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

1990

39. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b)
- Για κάθε $x \in [a, b]$ είναι $g(x) \neq 0$ και για κάθε $x \in (a, b)$ είναι $g'(x) \neq 0$ και
- $f(b)g(a) - f(a)g(b) = 0$, να αποδείξετε ότι:

- α) Για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[a, b]$.

β) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

1991

40.α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x) \cdot \sin x - g(x) \cdot \eta \mu x = g(x) \cdot \sin x$ και $g(0) = 1992$.

1992

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$, $x, \mu \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(1, 2)$.

1993)

42.α) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν οι f, g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f' = g$ και $g' = -f$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'', g'' και είναι συνεχείς. Αποδείξτε ακόμη ότι ισχύουν οι σχέσεις $f'' + f = g'' + g = 0$ και ότι η συνάρτηση $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή.

β) Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f, g . Να αποδείξετε ότι αν x_1, x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ τότε η g έχει μόνο μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

1996)

43. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει $g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

A. $g(0) = -\alpha$

B. $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1997

44. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ισχύει για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

α) Η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη C_f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β) υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

γ) υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

2000

45. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$.

2001

46. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την

$$\text{εξίσωση } f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2.$$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η

$$\text{εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία } \varepsilon: y = -\frac{1}{668}x + 2005.$$

2005

47. Δίνεται μια συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$, $f'(0) = 2f(0)$, $f'(2) = 2f(2) + 12e^4$ και $f(1) = e^2$, $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$, $0 \leq x \leq 2$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$.

2009

48. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x) + xf'(x) = \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x) + \sigma \nu x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1 - \sigma \nu x}{x}$, $x \neq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 - \sigma \nu x = x \cdot \eta \mu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $\xi \eta \mu \xi + \sigma \nu \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2$.

2011

49. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ και $g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$\text{και τύπο } (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο $+\infty$.

γ) Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της συνάρτησης $h: A - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\text{τύπο } h(x) = \frac{(g \circ f)(x)}{x - 2}.$$

δ) Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x), & x \in A \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \end{cases}$. Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του

θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x) = \varphi(x) \cdot \eta \mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0, 2]$.

2019

Μονοτονία - Ακρότατα

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 90$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f . 1986
51. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$, $x \in \mathbb{R}$, να έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1=1$ και $x_2=-\frac{5}{9}$. 1988
52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται στο $x_1=1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_2=2$.
 α) Να βρεθούν τα α, β .
 β) Να βρεθεί το είδος και η τιμή του ακρότατου. 1989
53. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \eta \mu^2 x - \sqrt{2} \cdot \eta \mu x + 2\sqrt{2}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 1991
54. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει η σχέση $1 + x < e^x < 1 + ex$. 1992
55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$, $x > 0$.
 α) Να βρεθεί η παράγωγος f' της f για κάθε $x > 0$.
 β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. 1992
56. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha x^3}{4}$, $x > 0$ και $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$. Τα έξοδα από τη πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, $x > 0$.
 α) Να βρείτε τη ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος που συμβολίζεται με $M(\alpha)$.
 β) Να βρείτε τη τιμή του α για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο κέρδος. 1993
57. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε:
 $f(x_0) + x_0 \cdot \ln x_0 = x_0$ 1994
58. Να αποδείξετε ότι
 α) $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 β) η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=0$. 1994
59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 Α. Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της f και $x_1 < x_2 < x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.
 Β. Αν $0 < \alpha < 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1, 0)$. 1995

60. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση
- $$f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}, t \geq 0 \text{ όπου } A \text{ ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους } K(t) \text{ από τη πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση}$$
- $$K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}, t \geq 0 \text{ και υποθέτουμε ότι } K(0) = 0. \text{ Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος } P(t) \text{ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνει μέγιστο.}$$

1995

61. Να αποδείξετε τις ανισότητες : **α)** $\eta \mu x < 2x, x > 0$, **β)** $\eta \mu x > x - \frac{x^3}{3}, x > 0$

1996

62. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει:
- $$f'(x) = g'(x) + \eta \mu^2 x + e^x, x \in [0, +\infty). \text{ Να αποδείξετε ότι } f(0) + g(x) < g(0) + f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

1996

63. Έστω g πραγματική συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και
- $$g''(x)g(x) - (g'(x))^2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι :}$$

α) Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

1997

103. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

1997

64. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = 2^{12} (e^{-4x} - e^{-\alpha x}), x \geq 0, \alpha > 4$.

α) Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0$

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα την h .

γ) Αν x_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 είναι ρίζα της δεύτερης παραγώγου της h , να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x_1, x_2 .

1998

65. **A.** Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}, x \in [0, +\infty)$.

B. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty). \text{ Να}$$

αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

1999

66. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

2000

67. Τη χρονική στιγμή t_0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση

του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και t

ο χρόνος σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β .

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

2000

68. Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωση του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \approx 2,4$)

2000

69. Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του

στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}$.

α) Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

β) Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

δ) Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

2000

70. Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \beta, \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί με } \beta^2 < 3\gamma.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

2001

71. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

2001

72. Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα.

Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα

καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5,5 + \frac{x^2}{200}\right)$ λίτρα και η

αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x, 0 < x \leq 90 \quad 0 < x \leq 90.$$

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Εσπερινά 2001

73. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

2002

74. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=0$ και $xf'(x) - 2f(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

2002

75. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

2003

76. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0) = 0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιος ώστε $f(x) = xf'(\xi)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$, $x > 0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

2003

77. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α) Να δείξετε ότι: i. $f(0) = 0$ ii. $f'(0) = 1$

β) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$.

γ) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$

2005

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{kx - x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο

σημείο $O(0,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $k = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2,4)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ξ , στο οποίο η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη στην ευθεία AB , όπου $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$.

Εσπερινά 2005

79. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
 β) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha = -1$:
 i. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
 ii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

2005

80. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$, $x > 0$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.
 ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1}$.

2006

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$.
 β) Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$

2006

82. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
 γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταντίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
 δ) Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

2006

83. Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 β) Για $k = 3$
 i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 ii. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
 iii. για κάθε $\alpha \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Εσπερινά 2006

84. Δίνεται μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0, 1)$.
 γ) Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.

Εσπερινά 2007

85. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) = x + 2\eta\mu x$ για κάθε $x \neq 0$.

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 3$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Εσπερινά 2007

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ και $f(e^5) > 0$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, +\infty)$.

Ομογενείς 2007

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα $\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2$.

Ομογενείς 2008

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1$, $\lambda, x \in \mathbb{R}$.

α) Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ .

β) Για $\lambda = 0$

i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 9x$.

iii. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Εσπερινά 2009

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + \sigma\upsilon\nu x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 8) = f(6x)$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x}$.

Εσπερινά 2010

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 3)\sqrt{9 - x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε την παράγωγο της f :

i. στο διάστημα $(-3, 3)$.

ii. στο $x_0 = -3$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

Εσπερινά 2010

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta}$, όπου α, β ακέραιοι αριθμοί. Η γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A\left(-2, \frac{5}{12}\right)$ δέχεται εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{5}{18}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

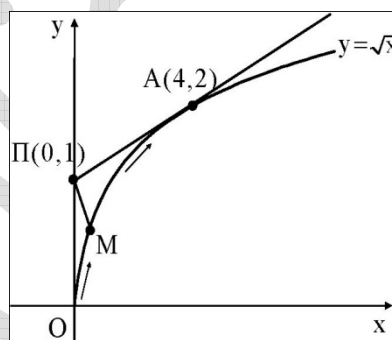
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $kx^3 + (1-4k)x^2 - x + 4 = 0$ (1) είναι ισοδύναμη με την $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

Εσπερινά 2011

92. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$.



α) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t) = 16t$

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση $d = (PM)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

Επαναληπτικές 2011

93. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f''(x) > -2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta x}{x^2 - x} = 2 \text{ και } f(1) = f'(0).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = -3$.

β) Αν η $g(x) = f(x) + \alpha(x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$, να βρείτε τον αριθμό α .

γ) Για $\alpha = 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2 - (\xi + 1)$.

δ) Για $\alpha = 1$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Εσπερινά 2012

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

2012

95. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\sqrt{x^2+1}f'(x) + \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να βρείτε την f .

β) Αν $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x^4+1) = f(3x^3+2x^2+3x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,4)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,4)$.

Εσπερινά 2013

96. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-3)^2(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία:

i. είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 3$ και

ii. η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της f είναι ακέραιος αριθμός.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (x-1)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Εσπερινά 2014

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του a , ώστε η ευθεία $y = 4x - 2$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Στη συνέχεια για $a = 1$

β) i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

ii. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x^3+x) > 10$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2+1} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$.

Εσπερινά 2014

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $(3,0)$.

Εσπερινά 2015

99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , όπου $g(x) = \sqrt{f(x)} - 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2$, $x \in (0, +\infty)$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Εσπερινά 2015

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.
 δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$.

Ομογενείς 2016

101. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

- i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
 iii. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ iv. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

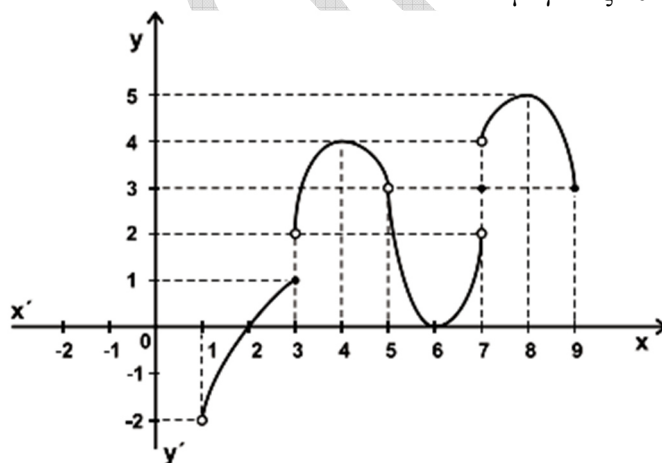
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



2016

102. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη της f^{-1} .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

γ) Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

2016

$$103. \text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
 β) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

2016

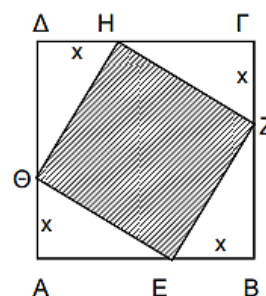
$$104. \text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

2017

105. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:

- α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .
 β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$, $0 \leq x \leq 2$.
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.
 δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.



2017

$$106. \text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta \mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.
 Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:
 β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
 γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .
 δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2}e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

2017

107. Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

- α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι $E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0, 8)$.
 β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m , ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 .

2018

108. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

- α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.
 β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$ για κάθε $x > 0$.
 δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$, όπου $0 < \alpha < 1$, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

2018

109. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 γ) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.
 ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.
 δ) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $ΜΟΚ$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

2019

110. Δίνονται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ε): $y = -x + 2$ η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.
 β) i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

2019

111. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)f'(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$. Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.
 δ) Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(0, 1)$.

2019

112. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση $f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x})$

2019

113. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

β) Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία.

δ) Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β3, να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

2020

114. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \lambda \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \lambda > 0.$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

γ) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

δ) Ένα σημείο $M(a, f(a))$, $a \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη 1.

2020

115. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

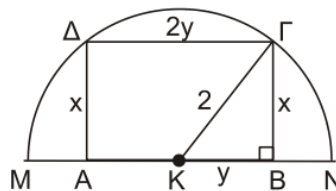
β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x - x_0} \right]$, όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

γ) Αν ο x είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

δ) Αν ο x είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho)(f'(k)+1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

2020

116. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο MN = 4 cm. Ορθογώνιο ABΓΔ με διαστάσεις x cm και 2y cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ABΓΔ, ως συνάρτηση του x, είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0, 2)$.
- β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ABΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.
- γ) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ABΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (E(x) - 2\sqrt{3})e^x$, $x \in (0, 2)$ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

2020

117. Έστω $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$$xf(x) = \sin x - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2020 \sin x - x = 2020$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2020

118. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

- α) Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
- β) Έστω (ε): $y = 3x - 2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος Γ1. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ με $-2 < \alpha < 2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = +1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f.
- γ) Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

2020

119. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \sin^3 x + f'(x) \sin^2 x \cdot \eta \mu x - 1 = 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \eta \mu x - \epsilon \phi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να

αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\eta \mu x} + \frac{1}{\sin x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, το οποίο και να

βρείτε.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με

$$\rho_1 < \rho_2.$$

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος Δ3.

2020

120. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\widehat{BOM} = \theta$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι $E(\theta) = (1 + \sin\theta)\eta\mu\theta$, $\theta \in (0, \pi)$.

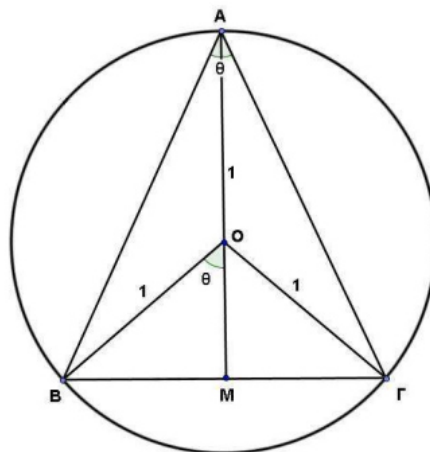
β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται. M

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

δ) Για τις γωνίες θ_1, θ_2 του ερωτήματος γ, να αποδείξετε ότι

$$\text{υπάρχουν } \xi_1, \xi_2 \in (0, \pi) \text{ τέτοια, ώστε: } \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2).$$

2020



121. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x)$, $x > 0$, $\lambda > 0$ και $g(x) = x^x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f , καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $x^x \geq \lambda x$ για κάθε $x > 0$.

γ) Αν $\lambda = 1$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_g η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2020

Κυρτότητα

122. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(x-3) + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω x_1, x_2 τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά. 1985
123. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = \frac{3}{2}$ και να γίνει ο πίνακας μεταβολής της f . 1986
124. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής. 1990
125. α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$, $x \in \Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x) \cdot f''(x) \geq [f'(x)]^2$.
β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω. 1992
126. α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.
β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:
 $\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$. 1992
127. Δίνεται ο θετικός πραγματικός α και η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. 1994
128. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
α) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x - \kappa} + \frac{3}{x - \lambda}$ για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.
β) Η συνάρτηση $g(x) = \ln |f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) . 1995
129. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$. 1995
130. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-2x}f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1999

131. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 \sin 2\alpha + 2x \sin^2 2\alpha + \eta \mu^2 2\alpha$, $x, \alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

2001

132. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη

παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) .

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

2003

133. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, 0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

2003

134. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

2004

135. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta \mu^2 \theta$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta \mu^2 \theta$.

2007

136. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού α .

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

2008

137. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$.

α) Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

β) Για $\alpha = e$,

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

- iii. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

2009

138. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμψής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμψής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

2010

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

γ) Να αποδείξετε ότι: $xf'(x) < f(x) + \ln 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Ομογενείς 2011

140. Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ συνάρτηση f με $f(0) = -3$ και η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2} f(x), \quad x \in (-1, 1) \text{ με } g(x) \leq \beta x - 3, \quad x \in (-1, 1), \text{ όπου } \beta \in \mathbb{R}. \text{ Δίνεται επιπλέον ότι η}$$

παράγωγος f' της f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0=0$ και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

β) Να δείξετε ότι $g'(0) = \beta$ και ότι η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι η $y = \beta x - 3$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \beta$, $x \in (-1, 1)$, έχει μοναδική ρίζα το 0.

δ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq \beta x - 3$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Εσπερινά 2012

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2} \ln^2 x + x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα.

β) Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό a τέτοιο, ώστε στο διάστημα $(a, a+1)$ η εξίσωση

$$f(x^4 + 2x) = f(4) \text{ να έχει μια τουλάχιστον λύση.}$$

γ) Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την ανίσωση $x \ln^2 x < 2 - 2x$.

Ομογενείς 2013

142. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα β και γ, δίνεται ότι $f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

2014

143. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(1) = e^{-1}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[0, +\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = 2e^{x-2}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

δ) Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f(-1))$ και να αποδείξετε ότι:
 $f(x) + 2e + 3ex \geq 0$ για κάθε $x \leq 0$.

Ομογενείς 2015

144. α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.}$$

γ) Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

δ) Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος γ, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x) \text{ όταν } x \in [0, +\infty).$$

2016

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $a > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $a > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμψής.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (a, x_2) .

2018

Ασύμπτωτες- Del Hospital

146. α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η σχέση $\ln x \leq |x - 1|$.

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[0, +\infty)$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$. Να αποδειχθεί ότι:

i. η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ii. είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$.

iii. $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

1983

147. Έστω η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.
 Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

β) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.

1994

148. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $A = \frac{f(a)}{g(a)}$ και

$B = B = \frac{f'(a) - Ag'(a)}{g(a)}$. Αν Φ πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{a\}$, τέτοια ώστε:

$\frac{f(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{\Phi(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R} - \{a\}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\lim_{x \rightarrow a} \Phi(x)$

1997

149. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) - g(x) = x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta \mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

2000

150. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, να βρείτε τα α, β .

2001

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \alpha & , x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x-1) & , x \in (1, 2] \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1}$.

β) Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

γ) Για $\alpha = -1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2001

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{2x + 4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

2002

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

2003

154. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \alpha x + \beta, & 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ισχύει: $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

2004

155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{2x + 4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

2002

156. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \in (1, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

2005

157. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(2 - \alpha)x^2 - kx + 2}{x - 3}$, $\alpha, k \in \mathbb{R}$ και $x \neq 3$.

α) Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$.

Εσπερινά 2005

158. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

β) Για $\lambda = 0$

i. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

2006

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x - 1)}, & x \geq 2 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Εσπερινά 2007

160. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$.

i. Να βρείτε την τιμή του k ώστε η g να είναι συνεχής.

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

2008

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε το k .

γ) Για $k = 1$,

i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Εσπερινά 2008

162. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x + 2)$, $x > -1$, $\lambda \geq -1$.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Έστω ότι $\lambda = -1$

i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

iii. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \neq 0$.

2009

163. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.

γ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \neq 0.$$

Εσπερινά 2009

164. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το α , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = ex$.

β) Για $\alpha = -1$,

i. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Ομογενείς 2009

165. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x} + 2x$, $x \neq 0$. Να βρείτε:

- α) Τα τοπικά ακρότατα της f .
- β) Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.
- δ) Το σημείο $M(\xi, f(\xi))$, $\xi > 0$, της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1, f(1))$ και $B(3, f(3))$.

Εσπερινά 2010

166. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\ln x$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
- β) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Ομογενείς 2010

167. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμψής.
- δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2011

168. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
 - β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση.
- δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$.

Επαναληπτικές 2012

169. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta$, $x > 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Αν είναι $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- β) Αν είναι $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, +\infty)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f :
 - i. έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη για κάθε α, β , την οποία και να βρείτε.
 - ii. έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο για $\alpha = 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε.
- δ) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, το $f(x_0) = 7$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος του ακροτάτου αυτού.

Εσπερινά 2012

170. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

• $f(1) = \frac{1}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος α).

γ) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2).$$

δ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f'(x)} - k) = 5$.

Εσπερινά 2013

171. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $-\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτη της στο $-\infty$.

2014

172. Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x + 1}$, $x \neq -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι

πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) i. Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h και στο $-\infty$.

ii. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Εσπερινά 2014

173. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $f(x) + xf'(x) = 2x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

• $f(1) = 10$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

γ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f' .

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) - 10 \leq (x - 1)f'(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Εσπερινά 2014

174. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία (μονάδες 5) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $ef(x) \leq 1$ για κάθε $x > 0$.

Ομογενείς 2014

175. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$xf(x) + \sin x = 1 - x^2 \eta \mu \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x} - x \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

β) Να υπολογίσετε τη παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.

Εσπερινά 2015

176. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός. Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -12$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) \geq \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^3 + 1}, \quad x > 0.$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^v} \mu \left(\frac{1}{x^2} \right) \right)$ για τις διάφορες ακέραιες τιμές του v .

Εσπερινά 2015

177. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}$, $x > 2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Ομογενείς 2016

178. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Ομογενείς 2008

179. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2\eta\mu x - x$.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$

2018

Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

180. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **α), β), γ)** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

2016

181. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

β) Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

2017

182. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

2018

183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + a, & x \leq 1 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $a = 1$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

2018

184. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

2019