

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 1
Συναρτήσεις

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 6

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

A4. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται $1 - 1$;

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Οι γραφικές παραστάσεις οποιωνδήποτε συναρτήσεων $f, -f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
- β) Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα.
- γ) Μία συνάρτηση f είναι $1 - 1$, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- δ) Κάθε συνάρτηση f είναι $1 - 1$, αν και μόνο αν, κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f ακριβώς σε ένα σημείο.
- ε) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι $1 - 1$ και η γραφική της παράσταση έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} που η γραφική της παράσταση διέρχεται επίσης από το σημείο A .

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 2

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσουμπίδης

Συναρτήσεις – Ιδιότητες Ορίων

Θέμα Α

A1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Μονάδες 5

A2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού τα σύνολα A, B αντίστοιχα, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$, τότε $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g που έχουν όριο στο x_0 και είναι τέτοιες, ώστε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

δ) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

ε) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε κατ' ανάγκη δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

στ) Ισχύει η σχέση $|\eta \mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ζ) Αν $u = g(x)$, $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ και $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell$.

Μονάδες 14

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 3

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσουμπίδης

Όρια

Θέμα Α

A1. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Μονάδες 3

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$.

β) Αν για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x) < f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

στ) Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

ζ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$.

η) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = -\infty$.

θ) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

ι) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 1$.

ια) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = 1$.

Μονάδες 22

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 4
Συνέχεια

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι και αυτή συνεχής στο x_0 .
- β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)f(\beta) \geq 0$, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο διάστημα (α, β) .
- γ) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- δ) Κάθε συνάρτηση f , η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, δεν παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.
- ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 5
Συνέχεια

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Κάθε συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν, υπάρχει το όριό της στο x_0 αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$.
- β) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.
- γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της.
- δ) Κάθε συνάρτηση f , η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, δεν έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό.
- ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοιχτού διαστήματος $\Delta = (\alpha, \beta)$ μέσω κάθε συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι ανοιχτό διάστημα.
- στ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοιχτού διαστήματος $\Delta = (\alpha, \beta)$ μέσω κάθε συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης f είναι ανοιχτό διάστημα.
- ζ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της σε αυτό είναι το ανοιχτό διάστημα (B, A) , όπου $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ και $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$.
- η) Υπάρχει συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, δεν είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών σε αυτό, το κλειστό διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$.

θ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $(\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της σε αυτό είναι το διάστημα $(A, B]$, όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

Μονάδες 18

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 6
Η Έννοια της Παραγώγου

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσουμπίδης

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Κάθε συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν, υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- γ) Κάθε συνάρτηση f , η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, δεν είναι και συνεχής σε αυτό.
- δ) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.
- ε) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 7

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Παράγωγος Συνάρτηση

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

γ) Ισχύει $(\sin x)' = -\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Ισχύει $(\exp x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

ε) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$, ισχύει $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'$.

Μονάδες 10

A5. Αν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις παραγωγίσης, να συμπληρώσετε τους παρακάτω κανόνες.

α) $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$

β) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$

γ) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \dots\dots\dots$

δ) $(f \circ g)'(x) = \dots\dots\dots$

Μονάδες 4

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 8

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσουμπίδης

Παράγωγος Συνάρτηση

Θέμα Α

- A1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη σε αυτό και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Μονάδες 5

- A2. Να αποδείξετε ότι $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Μονάδες 5

- A3. Να αποδείξετε ότι $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$.

Μονάδες 5

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Αν $\alpha > 0$, τότε $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}, x \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει $(\ln |x|)' = -\frac{1}{|x|}, x < 0$.

γ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

δ) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ε) Αν s είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού και α η συνάρτηση της επιτάχυνσής του, τότε $\alpha(t) = s''(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t .

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Εξεταζόμενος-η: _____

Θεωρία 9

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θεωρήματα – Μονοτονία

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και τέτοια, ώστε $f(\alpha) \neq f(\beta)$, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
- Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και τέτοια, ώστε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
- Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν αντιστρέφεται, τότε υπάρχει σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) . Αν $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB .
- Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη και μη σταθερή σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

- στ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A$, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in A$.
- ζ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 14

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Εξεταζόμενος-η: _____

Θεωρία 10

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσουμπίδης

Θεωρήματα – Μονοτονία

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

β) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $(\alpha - \beta)f'(\xi) + f(\alpha) = f(\beta)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει η ισοδυναμία $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και τέτοια, ώστε $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ .

στ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

ζ) Αν η παράγωγος συνάρτηση f' της f είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 14

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 11
Τοπικά Ακρότατα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

A3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Για κάθε συνάρτηση f που παρουσιάζει ολικό μέγιστο, αυτό είναι το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά της μέγιστα.
- β) Κάθε συνάρτηση f , η οποία παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα, παρουσιάζει και ολικό ελάχιστο που είναι το μικρότερο από όλα τα τοπικά της ελάχιστα.
- γ) Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ , στα οποία μία συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- δ) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- ε) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 10

Απαντήσεις

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 12
Τοπικά Ακρότατα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' μηδενίζεται και τα άκρα του Δ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.
- β) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, η μικρότερη από τις τιμές της στα κρίσιμα σημεία της και στα άκρα α, β είναι το ελάχιστο της σε αυτό το διάστημα.
- γ) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) . Αν οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα αυτό.
- δ) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) . Αν η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα αυτό, τότε είναι 1 – 1.

ε) Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) . Αν η f'' είναι γνησίως μονότονη σε αυτό, τότε η f έχει το πολύ δύο ακρότατα.

Μονάδες 10

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 13
Κυρτότητα, Σημεία Καμπής

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ; Να δώσετε την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία.

Μονάδες 3

A2. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 3

A3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- β) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, τότε οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f δε βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση.
- γ) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ .
- δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- ε) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

- στ) Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.
- ζ) Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο διάστημα αυτό.
- η) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Αν η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 \in \Delta$ και η f' είναι γνησίως μονότονη στο Δ , τότε $f(x) \neq \lambda x + \beta$ για κάθε $x \in \Delta$ και $x \neq x_0$.

Μονάδες 16

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών

Εξεταζόμενος-η: _____

Προσανατολισμού, Γ Λυκείου

Θεωρία 14

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Ασύμπτωτες, Κανόνες DLH

Θέμα Α

A1. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 3

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε τον Κανόνα De L' Hospital για όρια της μορφής $\frac{0}{0}$.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Για κάθε συνάρτηση f , η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης, αν και μόνο αν, και τα δύο όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι ίσα με $+\infty$ ή $-\infty$.

β) Η ευθεία $y = \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$, αν και μόνο αν, ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, αν και μόνο αν, ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δύο δεν έχουν ασύμπτωτες.

ε) Κάθε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει το πολύ δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες.

στ) Κάθε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει το πολύ δύο οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες.

ζ) Για κάθε συνάρτηση f , η γραφική της παράσταση δεν έχει κοινά σημεία με τις ασύμπτωτές της.

η) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε κατ' ανάγκη δεν υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 16

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 15
Ολοκληρώματα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 7

A2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα σε αυτό.

β) Κάθε συνάρτηση έχει το πολύ μία παράγουσα σε οποιοδήποτε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

γ) i. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

ii. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$.

δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

στ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες με f', g' συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx.$$

ζ) Αν οι συναρτήσεις f, g' είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u) \, du,$$

όπου $u = g(x)$, $du = g'(x) \, dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Μονάδες 14

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 16
Ολοκληρώματα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

A2. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- Υπάρχει συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν έχει παράγουσα σε αυτό.
- Όλες οι αρχικές της συνάρτησης f στο διάστημα Δ έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in \Delta$.
- Ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx \right)' = 0$.
 - Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} c \, dx = c(\alpha - \beta)$.
- Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \, dx = f(\beta) - f(\alpha)$.

- ε) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τέτοια, ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- στ) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τέτοιες, ώστε $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ με $f \neq g$ στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

Μονάδες 12

Απαντήσεις _____

Τεστ Μαθηματικών
Προσανατολισμού, Γ Λυκείου
Θεωρία 17
Ολοκληρώματα

Εξεταζόμενος-η: _____

Καθηγητής: Φώτης Χ. Κουτσομπίδης

Θέμα Α

- A1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Μονάδες 7

- A2. Έστω μία συνάρτηση g συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι

$$E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, dx.$$

Μονάδες 6

- A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τέτοιες, ώστε $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, ισχύει

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x) \, dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x) \, dx.$$

β) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \neq 0$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx < 0.$$

γ) i. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει η ισοδυναμία

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

ii. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει η ισοδυναμία $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) \, dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

- δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δεν μηδενίζεται παντού σε αυτό, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \neq 0$.
- ε) Για οποιεσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις f, g σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι $E(\Omega) = \int_{\beta}^{\alpha} |f(x) - g(x)| dx$.
- στ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 12

Απαντήσεις _____

Κεφάλαιο 1	Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης										
	α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η	θ	ι	ια
Τεστ 1	Λάθος	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό						
Τεστ 2	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Σωστό				
Τεστ 3	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό
Τεστ 4	Λάθος	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό						
Τεστ 5	Λάθος	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό		
Κεφάλαιο 2	Διαφορικός Λογισμός										
	α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η			
Τεστ 6	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος						
Τεστ 7	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό						
Τεστ 8	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό						
Τεστ 9	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Λάθος				
Τεστ 10	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Σωστό				
Τεστ 11	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Λάθος						
Τεστ 12	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό						
Τεστ 13	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Σωστό			
Τεστ 14	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Λάθος			
Κεφάλαιο 3	Ολοκληρωτικός Λογισμός										
	α	β	γ		δ	ε	στ	ζ			
			i	ii							
Τεστ 15	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό			
Τεστ 16	Λάθος	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό				
Τεστ 17	Σωστό	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Λάθος	Σωστό	Σωστό				