

Μαθηματικά

Φυλλάδιο Θεωρίας



Γ' Γενικού Λυκείου

προσανατολισμού

Askisopolis

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ; E2018

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

- Το γράμμα x παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.
- Το πεδίο ορισμού A της f συμβολίζεται με D_f .

2. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A .

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f .

4. Ποια είναι η σχέση της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων $-f$, $|f|$ με τη γραφική παράσταση της f ;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες; K 2007, E 2012, K 2016

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

6. Πως ορίζονται οι πράξεις των συναρτήσεων;

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και

B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x | x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι για $x \leq 1$ είναι $f(x)g(x) = (x+2) \cdot 0 = 0$ και για $x > 1$, είναι

$f(x)g(x) = 0 \cdot e^x = 0$, δηλαδή $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f, g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f^2(x) = g^2(x)$ αν και μόνο αν $f(x) = \pm g(x)$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ -2, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = 2, x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε οι f, g δεν είναι ίσες ούτε αντίθετες για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως $f^2(x) = g^2(x) = 4, x \in \mathbb{R}$.

9. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

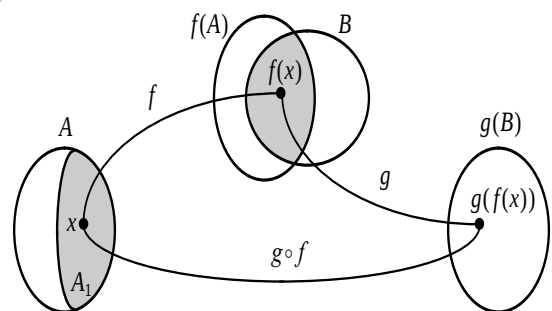
Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

**ΣΧΟΛΙΑ**

- Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

10. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε $f \circ g = g \circ f$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x+1, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

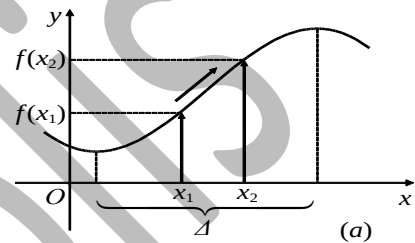
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Είναι φανερό ότι $f \circ g \neq g \circ f$.

11. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

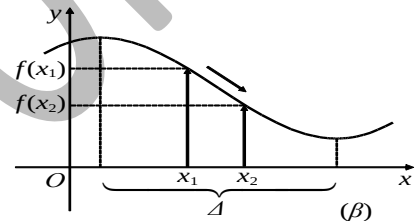
Μια συνάρτηση f λέγεται:

• **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)



• **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)

Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \nearrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \searrow \Delta$). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

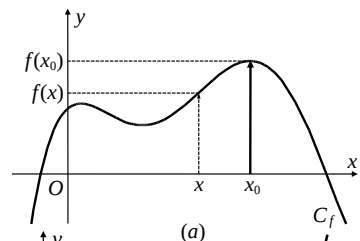


12. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο K 2014, E 2010

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

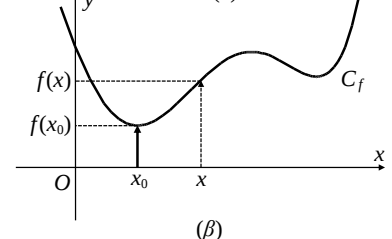
• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$,

όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. α)



• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$,

όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. β).

**13. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

«Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, αυτό θα ισχύει σε μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ παρουσιάζει μέγιστο, το $y = 1$, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z}$

και ελάχιστο, το $y = -1$, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi - \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z}$, αφού $-1 \leq \eta \mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Οι συναρτήσεις $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ δεν έχουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

15. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1; E 2005, E 2015

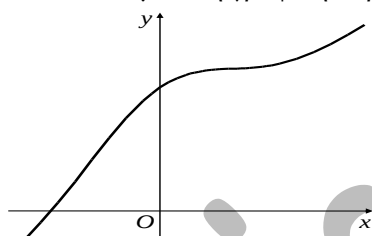
Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

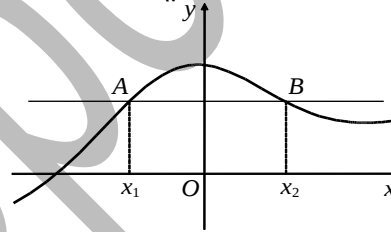
Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:
 - Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
 - Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



συνάρτηση 1-1



συνάρτηση όχι 1-1

- Αν μια

προφανώς, είναι συνάρτηση 1-1.

συνάρτηση είναι γνησίως

μονότονη, τότε

16. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

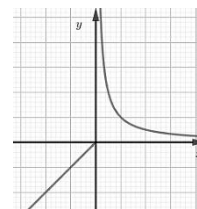
« Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε είναι και γνησίως μονότονη. »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **K2018**

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.

**17. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f και τι γνωρίζεται για τις γραφικές τους παραστάσεις;**

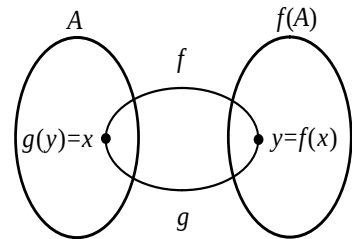
Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε



$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$.

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

18. Ποια θεωρήματα ισχύουν για το όριο και τη διάταξη;

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

19. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|, x \neq 0$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

20. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ σε μια περιοχή του x_0 τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = -x^2, x \neq 0$ και $g(x) = x^2, x \neq 0$.

Είναι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \neq 0$, όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

21. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων;

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$, $v \in \mathbb{N}^*$

22. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$. Είναι $A_f = [1, +\infty)$, $A_g = (-\infty, 1]$ και $A_{f+g} = \{1\}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$, όμως το όριο της $f(x) + g(x)$ στο $x_0 = 1$ δεν έχει νόημα αφού δεν υπάρχει περιοχή του 1 στο πεδίο ορισμού για να ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$.

23. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \text{ δηλαδή δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2, \text{ δηλαδή}$$

δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Όμως $f(x) + g(x) = x + 2, x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2$.

24. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 5, & x \leq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 7, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 7$ δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, όμως $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$

25. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$. Είναι $A_f = [1, +\infty)$, $A_g = (-\infty, 1]$ και $A_{f \cdot g} = \{1\}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$, όμως το όριο της $f(x)g(x)$ στο $x_0 = 1$ δεν έχει νόημα αφού δεν υπάρχει περιοχή του 1 στο πεδίο ορισμού για να ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)g(x))$.

26. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} -1, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ -1, & x \geq x_0 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όμως

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -1, & x < x_0 \\ -1, & x \geq x_0 \end{cases}, \text{ δηλαδή } \left(\frac{f}{g} \right)(x) = -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = -1,$$

$x_0 \in \mathbb{R}$.

27. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm 1$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ -1, & x \geq x_0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όμως

$$|f(x)| = 1, x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$$

28. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Από τις ιδιότητες απολύτων ισχύει ότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

29. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow -\sqrt{f^2(x)} \leq f(x) \leq \sqrt{f^2(x)}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{0} = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{f^2(x)}) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

30. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \\ &= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

31. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, με $Q(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

32. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. Ε 2016

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

33. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$;

1. $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$)

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 0$

34. Πως ορίζεται το όριο της σύνθεσης $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f, g στο σημείο x_0 ;

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

35. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μη πεπερασμένου ορίου $x_0 \in \mathbb{R}$;

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.
3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ
αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ
αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ
αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
7. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.
8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

Συνέπειες

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$, ενώ
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, v \in \mathbb{N}^*$,

Δηλαδή δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}^*$,

36. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

37. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$$

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **E2018**

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^4}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = -\infty$$

38. Ποια είναι τα όρια πολωνυμικής και ρητής συνάρτησης στο ∞ ;

→ Για την πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_n \neq 0$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_n x^n) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_n x^n)$$

→ Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_n \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_n x^n}{\beta_\mu x^\mu} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_n x^n}{\beta_\mu x^\mu} \right)$$

39. Ποια είναι τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;

1. Αν $\alpha > 1$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = +\infty$

2. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = -\infty$

40. Τι ονομάζεται ακολουθία;

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

41. Πότε η ακολουθία (α_n) έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$;

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$,

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|\alpha_n - \ell| < \varepsilon$.

42. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της; **K2015, E 2009**

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

43. Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

44. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α, β) ; E 2004

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

45. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$; K 2008, K 2012, E 2004, K 2017

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

46. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των f, g είναι συνεχείς στο x_0 ;

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f + g$, $c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[n]{f}$.

Επιπλέον αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

47. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία. E2014

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία

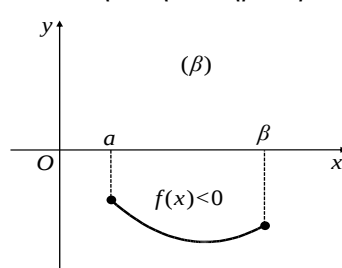
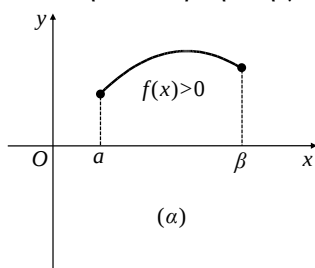
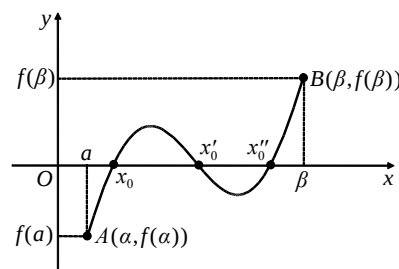
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$

βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

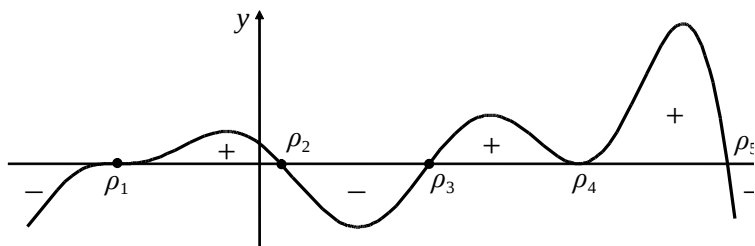
— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι

διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του πρόσημου της f για τις διάφορες τιμές του x .
Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f .



β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

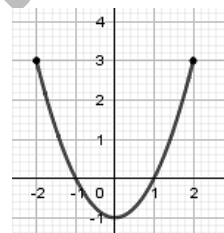
48. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [-2, 2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις $-1, 1$ στο $(-2, 2)$ όμως $f(-2) = 3$, $f(2) = 3$ και $f(-2)f(2) > 0$



49. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

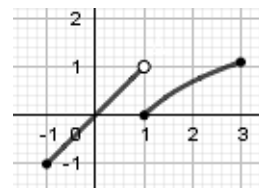
α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Για $x \in [-1, 1)$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ενώ για $x \in [1, 3]$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δηλαδή η $f(x) = 0$

έχει δύο ρίζες και $f(-1) = -1$, $f(3) = \ln 3$ δηλαδή $f(-1)f(3) < 0$,

όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[-1, 3]$ αφού δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$



50. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και να το αποδείξετε. K 2005, K 2015

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη

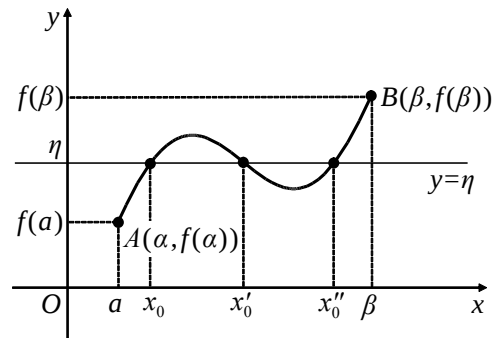
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y = \eta$ με $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.



51. Τι γνωρίζετε για την εικόνα ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης;

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

52. Να διατυπώσετε για μια συνεχής συνάρτηση το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

53. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$; K 2000

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

54. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; K 2004, K 2009, K2018

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και

συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Παρατήρηση

- Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

- Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$ οπότε $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

55. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ;

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι $v(t_0) \geq 0$,

ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε είναι $v(t_0) \leq 0$

56. Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή $v(t_0) = s'(t_0)$.

57. Τι ονομάζεται κλίση της f στο x_0 και ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 ;

Κλίση της f στο x_0 ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο x_0 , ονομάζεται το $f'(x_0)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

58. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. K 2000, K 2003, E 2007, E 2013

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

59. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

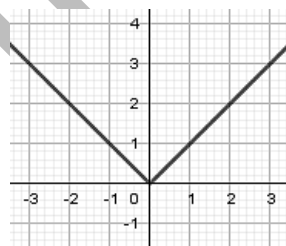
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

α) Ψευδής.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό,

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$



60. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

α) Αληθής.

β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο x_0 τότε βάση του θεωρήματος θα ήταν και συνεχής στο σημείο αυτό που δεν ισχύει.

61. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A ;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

62. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

63. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της; K 2013, E 2010

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

64. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f ; Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $n \geq 3$;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f .

Η νιοστή παράγωγος της f με $n \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(n)}$ και είναι: $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

65. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \text{ δηλαδή } (c)' = 0.$$

66. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1, \text{ δηλαδή } (x)' = 1.$$

67. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = nx^{n-1}$, δηλαδή $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}, \text{ δηλαδή } (x^n)' = nx^{n-1}.$$

68. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **E 2005, E 2009**
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}, \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Στο $x_0 = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

69. Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Για $x \neq x_0$, ισχύει:
$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Γενίκευση: $(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x)$

70. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν δύο συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, τότε και η $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = 1 - |x|$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = |x|$. Οι f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Είναι $(f + g)(x) = 1 - |x| + |x| = 1$ και $(f + g)'(x) = 0$.

71. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Το προηγούμενο θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι για τις τρεις

συναρτήσεις ισχύει: $(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

72. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

$$H \frac{f}{g} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ με } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$\text{Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα } \Delta \text{ τότε } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

73. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$.

$$\text{Πράγματι, για κάθε } x \neq 0 \text{ έχουμε: } (x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}.$$

74. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sin x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sin x - \eta\mu x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \sin x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

75. Πότε η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και πότε σε ένα διάστημα Δ ;

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u)u'$.

76. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

77. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,
 $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$.

78. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και

ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ K 2008

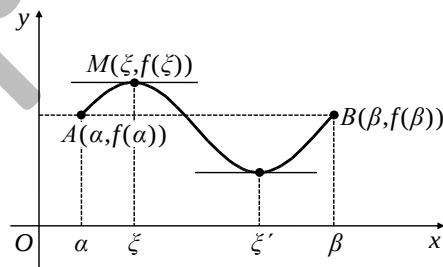
- αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ
- αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.
 Επομένως, $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

79. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

80. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. E 2007, E 2012

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.
 Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



81. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Στη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1, 2]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ με $f'(x) = 2x$, είναι $f'(0) = 0$ όμως $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$ δηλαδή $f(-1) \neq f(2)$.

82. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Αν ήταν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε λόγω του θεωρήματος Rolle θα υπήρχε $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

83. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

K 2003, K 2013, E 2008, K 2016

Αν μια συνάρτηση f είναι:

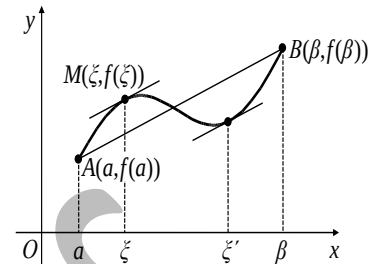
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο,

ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



84. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι:
η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . **K 2009, K 2014, E 2004**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

85. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A που αποτελείται από ένωση διαστημάτων, είναι παραγωγίσιμη στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A , τότε η f είναι σταθερή στο A »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

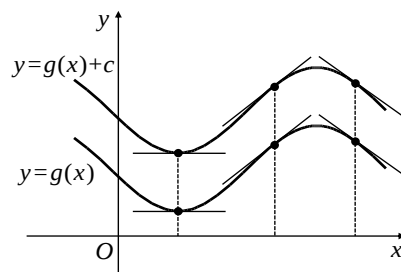
86. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



87. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με τη πρώτη τους παράγωγο»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x, c \in \mathbb{R}$

88. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

• Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

K 2006, K 2012, E 2000, K 2017

• Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε έχουμε } f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

• Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

89. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ »

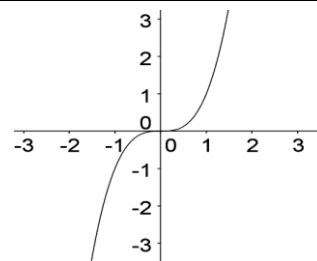
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

Είναι $f'(x) = 3x^2$, και $f'(0) = 0$, Δηλαδή, βλέποντας το σχήμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς να είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



90. Να δώσετε τους ορισμούς για το τοπικό μέγιστο K 2012, το τοπικό ελάχιστο K 2015 και το τοπικό ακρότατο.

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

- Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .
- Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται τοπικά ακρότατα αυτής.

91. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.
K 2011, K 2004, E 2013, E 2016, E 2017

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Επομένως,}$$

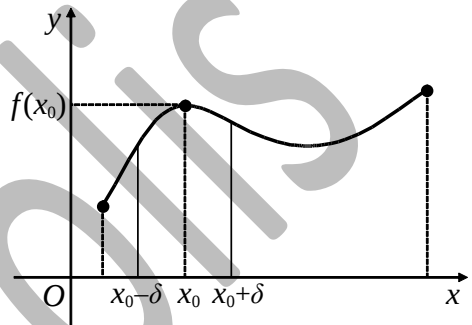
— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.


92. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ αφού $f(x) \geq 0 = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και δεν ορίζεται το $f'(0)$.

93. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ έχει $f'(0) = 0$ όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

94. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα; E 2013

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

95. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

E 2012, K 2016

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

96. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

E 2014, E2018

Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

97. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και τότε προς τα κάτω;

K 2006, K 2010, K 2013

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

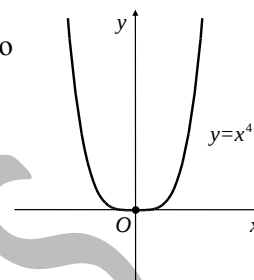
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

98. Με βάση ποιο θεώρημα εξετάζουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης f ; Ισχύει το αντίστροφό του; Δώστε παράδειγμα.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

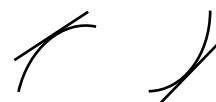
- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η f'' δεν είναι θετική στο 0 αφού $f''(0) = 0$.



99. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f ;

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



100. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

101. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της, τότε ποια σχέση ισχύει για τη δεύτερη παράγωγο της f στο x_0 ;

Πότε ένα σημείο είναι βέβαιο σημείο καμπής; **E 2017**

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
 - ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$
- τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

102. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$. Είναι $f \cap \left(-\infty, -\frac{\beta}{3\alpha}\right]$, $f \cup \left[-\frac{\beta}{3\alpha}, +\infty\right)$, οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(-\frac{\beta}{3\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$.

103. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

K 2010, E 2003, E 2015

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

104. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); K 2007, E 2016

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

105. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

στο $+\infty$, (αντιστοίχως στο $-\infty$); K 2005, K 2011

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Θεώρημα: Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως

στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του

βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, a)$

106. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L' Hospital**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)**

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

107. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; E 2006, E 2011, E 2014

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

108. Να αποδείξετε ότι:

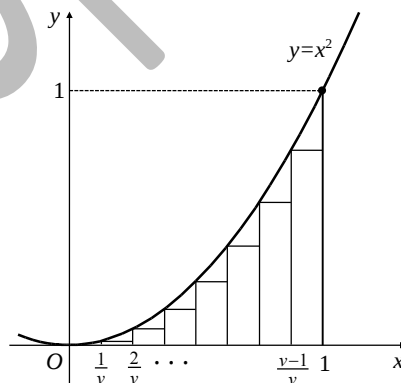
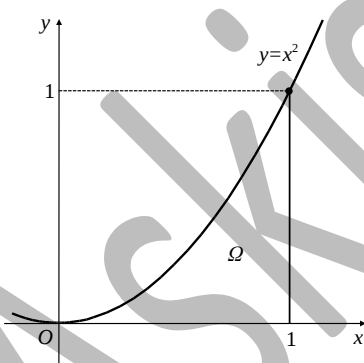
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

K 2010, E 2001, E 2003, E 2015

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

109. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega) = \frac{1}{3}$.



Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{1}{v}$, με άκρα τα σημεία: $x_0 = 0$,

$$x_1 = \frac{1}{v}, \quad x_2 = \frac{2}{v}, \quad \dots, \quad x_{v-1} = \frac{v-1}{v}, \quad x_v = \frac{v}{v} = 1.$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_v , των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

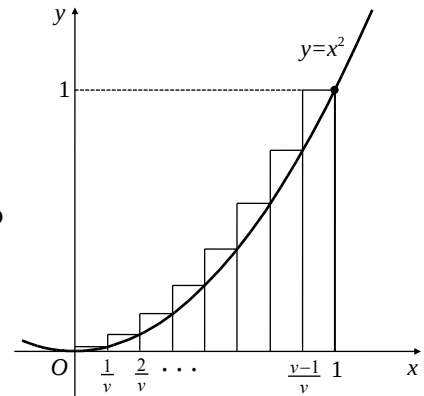
$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= f(0) \frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right) \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \left[0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] = \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v \cdot (2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}. \end{aligned}$$

- Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)\frac{1}{v}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,

$$\begin{aligned} E_v &= f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)\frac{1}{v} = \frac{1}{v} \left[f\left(\frac{1}{v}\right) + f\left(\frac{2}{v}\right) + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \right] \\ &= \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}. \end{aligned}$$



Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν E βρίσκεται μεταξύ των ε_v και E_v . Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_v \leq E \leq E_v$, οπότε

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v \leq E \leq \lim_{v \rightarrow \infty} E_v. \text{ Επειδή } \lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow \infty} E_v = \frac{1}{3}, \text{ έχουμε } E = \frac{1}{3}.$$

110. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) \geq 0$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα,

μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{v}$, με τα σημεία

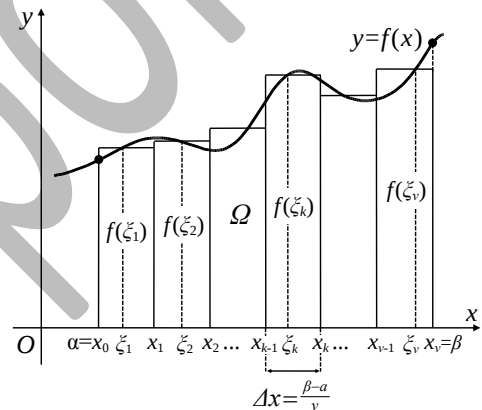
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = b.$$

- Σε κάθε υποδιαστήμα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_v)]\Delta x$$

- Υπολογίζουμε το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.



111. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, b]$.

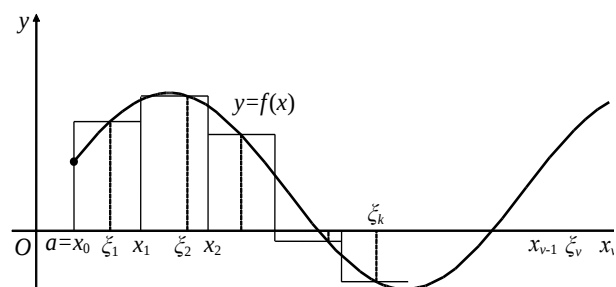
Με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = b$

χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε v ισομήκη

υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{v}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα



$S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \quad (1) \text{ .Αποδεικνύεται ότι,}$$

“Το όριο του αθροίσματος S_v , δηλαδή το $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από

την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β , συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το a στο β ”. Δηλαδή,

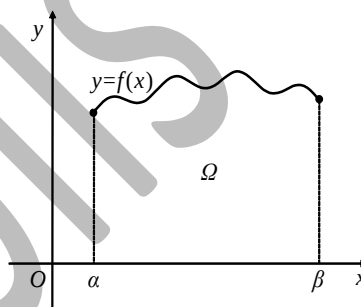
$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$. Δηλαδή,

$$\int_a^\beta f(x)dx = E(\Omega).$$

Επομένως Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$



112. Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_a^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^\beta f(x)dx$
- $\int_a^\beta [f(x) + g(x)]dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$ και γενικά
- $\int_a^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^\beta f(x)dx + \mu \int_a^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_a^\beta f(x)dx > 0$.

113. Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx \text{ όπου } f', g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο } [a, \beta].$$

114. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής;

$$\int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(\beta)$.

115. Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και a ένα σημείο του Δ , να γράψετε τι γνωρίζετε συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή

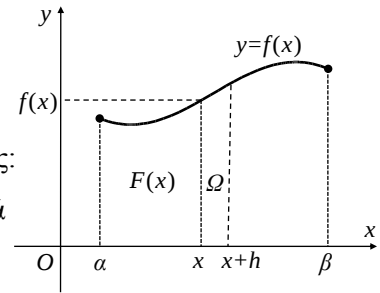
$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt = \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \approx f(x) \cdot h, \text{ για μικρά } h > 0.$$

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$, οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$



116. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.
K 2002, K 2013, E 2008, K2018

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε: $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$.

Απόδειξη

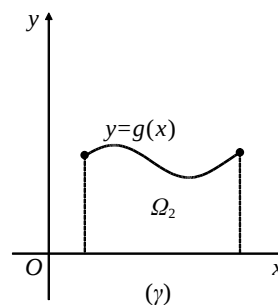
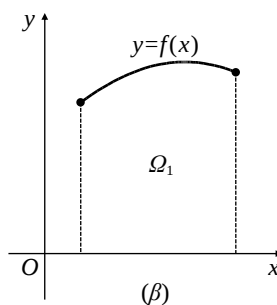
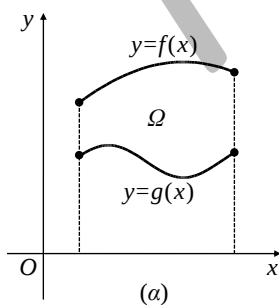
Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. (1)

Από την (1), για $x = a$, έχουμε $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t) dt + c = c$, οπότε $c = G(a)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(a)$ οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t) dt + G(a) \text{ και άρα } \int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a).$$

117. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$



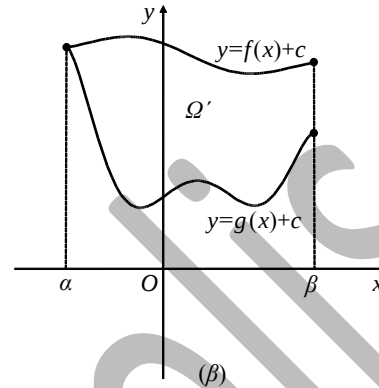
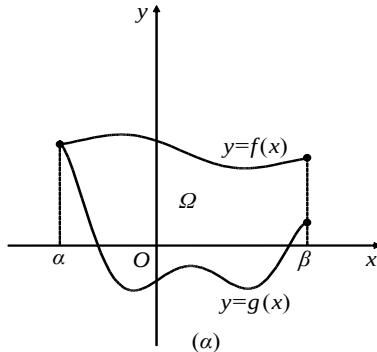
Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx. \text{ Επομένως,}$$

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx.$$

118. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx. \text{ Άρα } E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$

119. Έστω, μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,

τότε $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

