

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΝΟΜΑ:

ΦΥΛΛΑΔΙΟ: (10) ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

1. Δίνεται συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ παραγωγίσιμη στο $x_0=4$ με $f'(4)=0$. Να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(3x+1), & x < 1 \\ f(6x-2), & x \geq 1 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $g'(1)=0$.

2. Δίνεται συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 για την οποία ισχύει:

$f(0)=f(1)$. Αν $g(x) = \begin{cases} f(2x), & x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο

$\frac{1}{2}$, αν και μόνον αν $f'(0)=f'(1)$.

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} - e^2}{x - 1}$, γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$,

δ) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, για την οποία ισχύει $f^5(x) + 3f(x) = x - 2$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το $(f^{-1})'(1)$.

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x > 0$$

5. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x > 0$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας xx' δεν εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f .

6. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln^5 x + x^3$, $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη f^{-1} . Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$.

7. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη να βρείτε την $(f^{-1})'(2)$.

8. Να βρείτε μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$[P'(x)]^2 = 8P(x) + 1, \text{ για κάθε } x \in R.$$

9. Να βρείτε μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε:

i) $P(x) - P'(x) = x^2 - x + 2$, για κάθε $x \in R$,

ii) $[P'(x)]^2 = P(x)$, για κάθε $x \in R$, και $P(1) = 0$

iii) $P(2x) = P'(x) \cdot P''(x)$ για κάθε $x \in R$.

10. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=(x-p_1)^k(x-p_2)^\lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
- $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x-p_1} + \frac{\lambda}{x-p_2}, \text{ για κάθε } x \text{ διαφορετικό του } p_1 \text{ και του } p_2.$$
11. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^3-2x$. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της που άγονται από το σημείο $A(1, -1)$.
12. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, $A=[0,2\pi]$. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της Cf που σχηματίζουν με τον xx' γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$.
13. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2+2x+3$ $g(x)=x^2+4$.
14. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$ $g(x)=\ln(\lambda x)$. Να βρείτε το λ ώστε η κοινή εφαπτομένη αυτών να διέρχεται από το σημείο $M(1,0)$.
15. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και ισχύει:
- $$f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y) + a, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$
- Να αποδείξετε ότι: $f(0)=-a=0$, και $f'(x)=f(x)+f'(0)e^x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

.Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $f(x)g(x)=1$ και $g'(x)=-g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

16. **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- β)** Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(k, f(k))$ και $B(k, g(k))$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- i.** $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ **ii.** $(MN) = \text{σταθερό}$.