

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x$. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[0,1]$. Αν ναι, να βρείτε ξ .
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x$. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[-1,1]$. Αν ναι, να βρείτε ξ .
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0 \\ x^3 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[-1,2]$. Αν ναι, να βρείτε τα αντίστοιχα ξ .
- Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β , ώστε να ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Μέσης τιμής για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + \beta x, & x > 1 \end{cases}$ στο διάστημα $[0, 2]$ και στην συνέχεια να βρείτε τα αντίστοιχα $\xi \in (0, 2)$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x + 5, & x > 1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[-2, 3]$. Ελέγξτε αν παρόλα αυτά υπάρχουν ξ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος.
- Για την συνάρτηση f ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο διάστημα $(0,2)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
- Δίνεται παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(7) - f(0) = 2$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο διάστημα $(0,7)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε: $3f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 2$.
- Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 0$.
- Δίνεται παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(0) = 3$ και $f(2) = 1$. Α) Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο $(0,2)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = x_0 + 1$. Β) Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο διάστημα $(0, 2)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.
- Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. i) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4}$, ii) Αν η f' είναι ένα προς ένα. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{4}{f'(\xi)}$.
- Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ i) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$, ii) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1)(x_0 - \alpha) = 3f'(\xi_2)(\beta - x_0)$. iii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$.

12. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' συνεχή. Αν για τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$, και $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α, γ) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

13. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$, με f' συνεχής στο $(1, 3)$ και $f'(1) = 4$.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}, & x \in (1, 3] \\ 2, & x = 1 \end{cases}, \text{ i) Να δείξετε ότι η } g \text{ είναι συνεχής στο } 1. \text{ ii) Αν } f(1) = f(3), \text{ να δείξετε ότι}$$

υπάρχει ξ στο $(1, 3)$ στο οποίο η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της g σχηματίζει με τον xx' γωνία 135° .

14. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $2f(2) = f(1) + f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

15. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

16. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) \cdot f'(a)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

17. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ τέμνει την C_f στο σημείο $B(\beta, f(\beta))$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

18. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ευθεία (ε) εφάπτεται στην C_f στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

19. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ευθεία (ε) τέμνει την C_f σε τρία σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α, γ) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

20. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $-2 \leq f'(x) \leq 2$, για κάθε x στο $(2, 4)$. Αν $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$, δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f , να δείξετε ότι $(AB) \leq 2\sqrt{5}$.

21. Για οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές x και y να δείξετε ότι: $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y|$. Στην συνέχεια

να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}) = 0$.

22. Να δείξετε ότι: $\frac{6-e}{3} < \ln 3 < \frac{3}{e}$.

23. Να λυθεί η εξίσωση: $2^x + 5^x = 3^x + 4^x$, με x πραγματικό αριθμό.

24. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ και $f'(x) \leq 2$ για κάθε x στο $(0, 1)$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 2x + 3$, για κάθε x στο $[0, 1]$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, τέτοια ώστε: $f''(x_1) + \alpha + \beta = e^{x_2}$.

26. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ με $f(-1) = 1$, $f(1) = 5$ και $f'(x)$ φθίνουσα στο $[-1, 1]$. Να αποδείξετε ότι: α) υπάρχει ξ στο $(-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3$, β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1, \gamma) f(0) > 3.$$

27. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$.