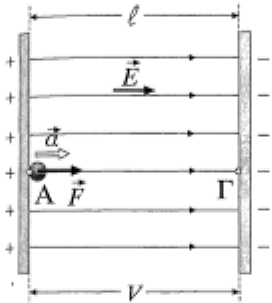
Βασικές λυμένες ασκήσεις



12.1 **Πρωτόνιο μάζας m_p και φορτίου q_p αφήνεται στο σημείο Α, κοντά στη θετική πλάκα, του ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου του σχήματος. Οι παράλληλες πλάκες απέχουν ℓ μεταξύ τους και έχουν φορτιστεί σε τάση V.**

α) Με πόση επιτάχυνση κινείται το πρωτόνιο;

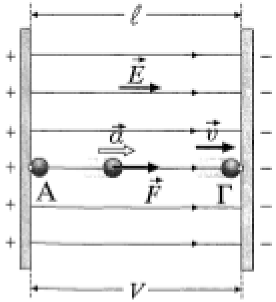
β) Σε πόσο χρόνο το πρωτόνιο φτάνει στην αρνητική πλάκα;

γ) Με πόση ταχύτητα φτάνει το πρωτόνιο στην αρνητική πλάκα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Το πρωτόνιο δέχεται από το ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο δύναμη σταθερού μέτρου

$$F = q_p E$$



Αλλά είναι $E = \frac{V}{\ell}$, σχέση που ισχύει σε κάθε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο, οπότε

$$F = q_p \cdot \frac{V}{\ell}$$

Αν δεχθούμε το βάρος του πρωτονίου αμελητέο σε σχέση με τη δύναμη $\vec{F}$, τότε το πρωτόνιο θα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών με επιτάχυνση

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{F}}{m_p} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha = \frac{q_p V}{m_p \ell}}$$

β) Από την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα, του πρωτονίου έχουμε για τη μετατόπισή του από την αρχική θέση:

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

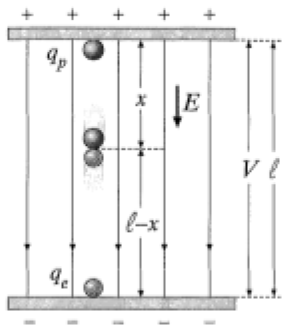
Θέτοντας $x = \ell$ βρίσκουμε τον χρόνο που χρειάζεται το πρωτόνιο για να πάει από τη θετική πλάκα στην αρνητική:

$$\ell = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{ή} \quad t = \sqrt{\frac{2\ell}{\alpha}} \quad \text{ή} \quad \boxed{t = \ell\sqrt{\frac{2m_p}{q_p V}}}$$

γ) Το πρωτόνιο φτάνει στην αρνητική πλάκα με ταχύτητα που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon = \alpha t \quad \text{ή} \quad \upsilon = \alpha\sqrt{\frac{2\ell}{\alpha}} \quad \text{ή} \quad \upsilon = \sqrt{2\ell\alpha} \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}}}$$

12.2 **Δύο παράλληλες οριζόντιες πλάκες απέχουν μεταξύ τους απόσταση ℓ και παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού V. Ένα ηλεκτρόνιο αφήνεται ελεύθερο από την αρνητική πλάκα και την ίδια χρονική στιγμή ένα πρωτόνιο αφήνεται από τη θετική. Αν e το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο, να βρείτε σε ποια απόσταση από τη θετική πλάκα θα συναντηθούν τα δύο σωματίδια.**
Δίνεται ο λόγος m_p/m_e.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Τόσο το πρωτόνιο όσο και το ηλεκτρόνιο εκτελούν στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Το μέτρο της έντασης $\vec{E}$ του πεδίου δίνεται από τη σχέση $E = \frac{V}{\ell}$.

Το πρωτόνιο κινείται με επιτάχυνση μέτρου α_p που βρίσκεται από τις σχέσεις:

$$F_p = |q_p|E = e \cdot \frac{V}{\ell} \quad \text{και} \quad F_p = m_p\alpha_p, \quad \text{οπότε} \quad \alpha_p = \frac{Ve}{m_p\ell}$$

Αντίστοιχα για το ηλεκτρόνιο ισχύουν:

$$F_e = |q_e|E = e \cdot \frac{V}{\ell} \quad \text{και} \quad F_e = m_e\alpha_e, \quad \text{οπότε} \quad \alpha_e = \frac{Ve}{m_e\ell}$$

Για το διάστημα x που διανύει το πρωτόνιο μέχρι να συναντηθεί με το ηλεκτρόνιο ισχύει

$$x = \frac{1}{2}\alpha_p t^2 \quad ή \quad x = \frac{1}{2}\cdot\frac{Ve}{m_p \ell}t^2 \qquad (1)$$

Το ηλεκτρόνιο, μέχρι να συναντηθεί με το πρωτόνιο, διανύει διάστημα $\ell - x$, για το οποίο ισχύει

$$\ell - x = \frac{1}{2}\alpha_e t^2 \quad ή \quad \ell - x = \frac{1}{2}\cdot\frac{Ve}{m_e \ell}t^2 \qquad (2)$$

(Ο χρόνος κίνησης μέχρι να συναντηθούν τα σωματίδια είναι ο ίδιος, διότι αφήνονται να κινηθούν την ίδια χρονική στιγμή.)

Με διαίρεση των σχέσεων (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\ell - x}{x} = \frac{m_p}{m_e} \quad ή \quad \boxed{x = \frac{\ell}{\frac{m_p}{m_e}+1}}$$

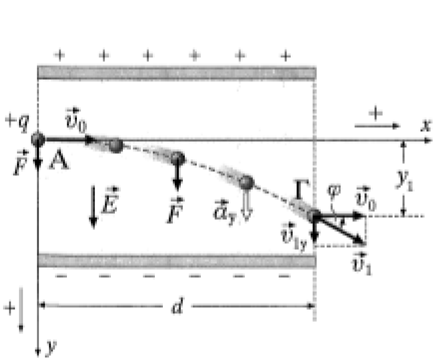
12.3 **(Διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου από το πεδίο) Ανάμεσα σε δύο παράλληλες οριζόντιες μεταλλικές πλάκες με μήκος $d = 1\,m$ η καθεμία δημιουργείται ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο έντασης μέτρου $E = 10^5\,\mathrm{V}/m$. Σωματίδιο μάζας $m = 10^{-11}\,kg$ και φορτίου $q = +10^{-12}\,C$ εισέρχεται στο πεδίο από σημείο Α, έχοντας ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 100\,m/s$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Αν το σωματίδιο εξέρχεται από το πεδίο, να βρείτε:**

α) τον χρόνο παραμονής του σωματιδίου μέσα στο πεδίο και την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου,

β) την ταχύτητα εξόδου του σωματιδίου,

γ) τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Η δύναμη $\vec{F} = \vec{E}q$ που δέχεται το σωματίδιο από το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι κάθετη στην αρχική του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, οπότε για τη μελέτη της κίνησής του παίρνουμε τους άξονες x και y, όπως στο σχήμα.

- **Στον άξονα x** η κίνηση του σωματιδίου είναι ευθύγραμμη ομαλή, οπότε ισχύουν:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \quad (1) \qquad και \qquad x = \upsilon_0 t \quad (2)$$

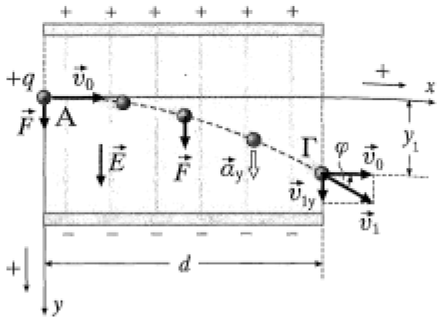
◆ **Στον άξονα** y η κίνηση του σωματιδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα, με επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m} = 10^4\, m/s^2$$

και ισχύουν:

$$\upsilon_y = \alpha t \quad (3) \qquad \text{και} \qquad y = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (4)$$

α) Στο σημείο εξόδου Γ η οριζόντια μετατόπιση x του σωματιδίου είναι ίση με το μήκος d των πλακών, οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:



$$d = \upsilon_0 t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{d}{\upsilon_0} \quad \text{ή} \quad \boxed{t_1 = 10^{-2}\, s}$$

που είναι ο χρόνος παραμονής του σωματιδίου μέσα στο πεδίο.

Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του σημείου εξόδου Γ και του σημείου εισόδου Α βρίσκεται από τη σχέση

$$y_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^4 \cdot (10^{-2})^2\, m \quad \text{ή} \quad \boxed{y_1 = 0{,}5\, m}$$

β) Στο σημείο Γ η ταχύτητα του σωματιδίου (ταχύτητα εξόδου) έχει μέτρο

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_{1y}^2}, \quad \text{όπου} \quad \upsilon_{1y} = \alpha t_1 = 10^4 \cdot 10^{-2} = 100\, m/s, \quad \text{οπότε}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{(100)^2 + (100)^2}\, m/s \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon_1 = 100\sqrt{2}\, m/s}$$

και διεύθυνση που σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ, όπου

$$\text{εφ}\theta = \frac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_0} = \frac{100}{100} = 1, \quad \text{άρα} \quad \boxed{\theta = 45°}$$

γ) Από **τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού** παίρνουμε για τα σημεία Α και Γ:

Στη διεύθυνση του άξονα x το έργο της δύναμης $\vec{F}$ του πεδίου είναι μηδέν, διότι η $\vec{F}$ είναι συνεχώς κάθετη στον άξονα x.

$$V_A - V_\Gamma = \frac{W_F^{(A\to\Gamma)}}{q}$$

Η $F = Eq$ είναι σταθερή και **η μετατόπιση στη διεύθυνση της δύναμης** είναι y_1, οπότε

$$W_F^{(A\to\Gamma)} = Fy_1 = Eqy_1$$

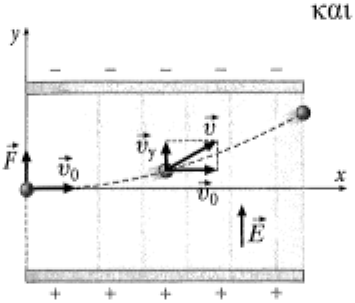
Επομένως

$$V_A - V_\Gamma = \frac{Eqy_1}{q} = Ey_1 = 10^5 \cdot 0{,}5\,\text{V} \quad \text{ή} \quad \boxed{V_A - V_\Gamma = +5 \cdot 10^4\,\text{V}}$$

12.4 **(Εξίσωση τροχιάς) Ένα φορτισμένο σωματίδιο, μάζας $m = 2 \cdot 10^{-11}\,kg$ και φορτίου $q = +2\,pC$, εισέρχεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 200\,m/s$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου έντασης μέτρου $E = 2 \cdot 10^5\,\text{V}/m$. Να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα που κινείται μέσα στο πεδίο.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παίρνουμε δύο ορθογώνιους άξονες· τον άξονα x στη διεύθυνση της $\vec{\upsilon}_0$ και τον άξονα y στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών του πεδίου.



- **Στον άξονα** x: Το σωματίδιο θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, οπότε ισχύει

$$x = \upsilon_0 t \quad \text{ή} \quad \boxed{x = 200t} \quad (\text{S.I.}) \qquad (1)$$

- **Στον άξονα** y: Το σωματίδιο θα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα, με επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha_y = \frac{F}{m} \quad \text{ή} \quad \alpha_y = \frac{Eq}{m} = 2 \cdot 10^4\,m/s^2$$

*Η **εξίσωση τροχιάς** σε μια κίνηση είναι μια σχέση μεταξύ των συντεταγμένων θέσης x και y, η οποία δεν περιλαμβάνει τον χρόνο, και μας δίνει το είδος της τροχιάς του σώματος. Για να βρούμε την εξίσωση τροχιάς, αρκεί να βρούμε ποιες σχέσεις συνδέουν τα x και y με τον χρόνο και στη συνέχεια να κάνουμε απαλοιφή του χρόνου.*

Κάθε χρονική στιγμή t θα ισχύουν:

$$\upsilon_y = \alpha_y t \quad \text{ή} \quad \upsilon_y = 2 \cdot 10^4 t \quad (\text{S.I.}) \quad \text{και}$$

$$y = \frac{1}{2}\alpha_y t^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{y = 10^4 t^2} \quad (\text{S.I.}) \qquad (2)$$

*Στα Μαθηματικά μια εξίσωση της μορφής $y = \kappa x^2$ είναι εξίσωση παραβολής, γι' αυτό και η τροχιά του σωματιδίου μέσα στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο όταν $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}_0$ είναι **παραβολή**.*

Από τη σχέση (1) παίρνουμε $t = \frac{x}{200}$, οπότε η σχέση (2) γράφεται:

$$y = 10^4 \cdot \frac{x^2}{4 \cdot 10^4} \quad \text{ή} \quad \boxed{y = \frac{x^2}{4}} \quad (\text{S.I.})$$

που είναι η εξίσωση τροχιάς του σωματιδίου. Η σχέση $y = \frac{x^2}{4}$ είναι εξίσωση παραβολής, γι' αυτό και η τροχιά του σωματιδίου είναι παραβολική.

12.5 **Δύο οριζόντιες παράλληλες πλάκες, που καθεμία έχει μήκος $d = 1\,m$, έχουν διαφορά δυναμικού $V = 10^5$ V και απέχουν μεταξύ τους $\ell = 1\,m$. Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα $m = 10^{-11}\,kg$ και φορτίο $q = +10^{-12}\,C$ εισέρχεται ανάμεσα στις πλάκες με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 100\,m/s$ και διεύθυνση κάθετη στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου των πλακών.**

α) Να προσδιορίσετε την κατακόρυφη απόκλιση y_1 και την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ του σωματιδίου τη στιγμή που βγαίνει από τις πλάκες.

β) Αν ένα πέτασμα τοποθετηθεί σε απόσταση $s = 2\,m$ δεξιά από τα άκρα των πλακών, σε ποια θέση του πετάσματος θα χτυπήσει το σωματίδιο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επειδή το πεδίο βαρύτητας δεν λαμβάνεται υπόψη, η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι η δύναμη από το ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο, η οποία έχει μέτρο

$$F = qE = q \cdot \frac{V}{\ell} \quad \text{ή} \quad F = 10^{-12} \cdot \frac{10^5}{1}\,N \quad \text{ή} \quad \boxed{F = 10^{-7}\,N}$$

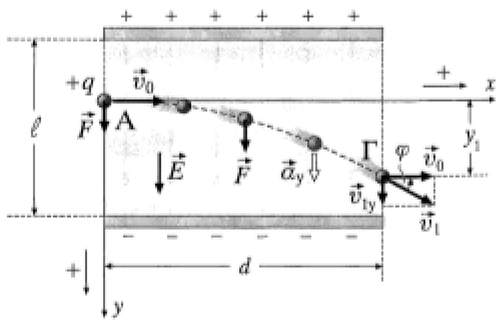
Υπό την επίδραση αυτής της δύναμης και μέχρι το σημείο εξόδου Γ το σωματίδιο εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία αποτελείται από τις εξής δύο κινήσεις:

- Μια οριζόντια ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$.
- Μια κατακόρυφη ομαλά επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα, με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_y$, εξαιτίας της δύναμης $\vec{F}$ του πεδίου.

Ισχύει $\alpha_y = \frac{F}{m} = 10^4\,m/s^2$.

α) Προσδιορισμός της κατακόρυφης απόκλισης y_1

Αν t_1 ο χρόνος της κίνησης του σωματιδίου ανάμεσα στις πλάκες, τότε για την κατακόρυφη μετατόπισή του έχουμε $y_1 = \frac{1}{2}\,\alpha_y t_1^2$ και για την οριζόντια:



$$d = \upsilon_0 t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{d}{\upsilon_0} \quad \text{ή} \quad \boxed{t = 10^{-2}\,s}, \quad \text{οπότε}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\,\alpha_y t_1^2 \quad \text{ή} \quad y_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 10^{-4}\,m \quad \text{ή}$$

$$y_1 = 0{,}5\,m$$

Προσδιορισμός της ταχύτητας εξόδου $\vec{\upsilon}_1$

Στο σημείο εξόδου Γ το μέτρο της $\vec{\upsilon}_{1y}$ είναι

$$\upsilon_{1y} = \alpha_y t_1 = 10^4 \cdot 10^{-2}\, m/s \quad \text{ή} \quad \upsilon_{1y} = 100\, m/s$$

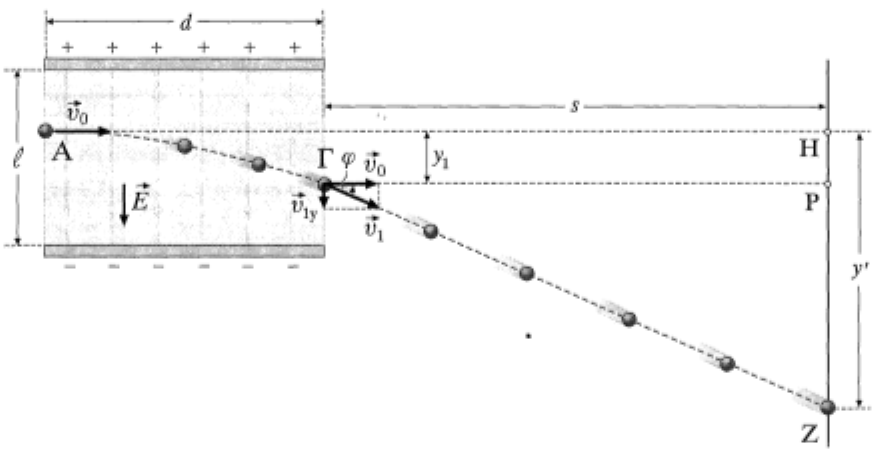
οπότε η ταχύτητα εξόδου του σωματιδίου από το πεδίο θα έχει μέτρο

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_{1y}^2} \quad \text{ή} \quad \boxed{\upsilon_1 = 100\sqrt{2}\, m/s}$$

Η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της $\vec{\upsilon}_1$ με τη διεύθυνση της $\vec{\upsilon}_0$ βρίσκεται από τη σχέση

$$\text{εφ}\phi = \frac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_0} = 1, \quad \text{οπότε} \quad \boxed{\phi = 45^\circ}$$

β) Από το σημείο εξόδου Γ και μετά το σωματίδιο δεν δέχεται καμία δύναμη και έτσι η κίνηση που εκτελεί είναι **ευθύγραμμη ομαλή** κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς στο σημείο Γ και με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα εξόδου $\vec{\upsilon}_1$. Το σωματίδιο θα χτυπήσει στο πέτασμα στη θέση Ζ.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΡΖ παίρνουμε:

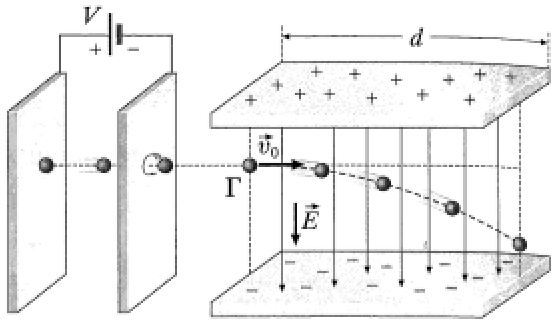
$$(\text{PZ}) = (\Gamma\text{P})\text{εφ}\phi \quad \text{ή} \quad (\text{PZ}) = s \cdot \text{εφ}45^\circ = 2\, m$$

Συνεπώς είναι

$$(\text{HZ}) = (\text{HP}) + (\text{PZ}) = y_1 + (\text{PZ}) \quad \text{ή} \quad \boxed{(\text{HZ}) = 2{,}5\, m}$$

12.6 **Το ειδικό φορτίο $\left(\frac{q}{m}\right)$ του πρωτονίου (p) είναι διπλάσιο από το ειδικό φορτίο του σωμάτιου α. Τα σωματίδια αυτά επιταχύνονται από την ηρεμία με μια σταθερή τάση V. Στη συνέχεια**

εισέρχονται από το ίδιο σημείο Γ στο κατακόρυφο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο έντασης $\vec{E}$ που δημιουργούν οι πλάκες, μήκους d, κάθετα προς τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Τα σωματίδια βγαίνουν από το πεδίο. Να βρείτε για την κίνηση των σωματιδίων στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο:



α) τον λόγο $\frac{t_p}{t_\alpha}$ των χρόνων παραμονής των σωματιδίων στο πεδίο,

β) τον λόγο $\frac{y_p}{y_\alpha}$ των κατακόρυφων αποκλίσεων,

γ) τον λόγο $\frac{\upsilon'_p}{\upsilon'_\alpha}$ των ταχυτήτων εξόδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Τα σωματίδια επιταχύνονται λόγω της τάσης V και μπαίνουν στο πεδίο με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_p$ και $\vec{\upsilon}_\alpha$.

Από το θεώρημα έργου - ενέργειας παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m_p\upsilon_p^2 - 0 = q_pV \quad \text{ή} \quad \upsilon_p = \sqrt{\frac{2q_pV}{m_p}} \quad \text{και}$$

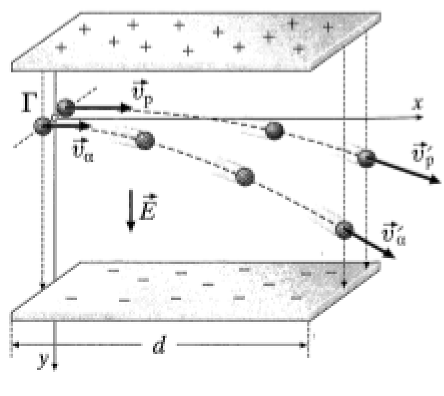
$$\frac{1}{2}m_\alpha\upsilon_\alpha^2 - 0 = q_\alpha V \quad \text{ή} \quad \upsilon_\alpha = \sqrt{\frac{2q_\alpha V}{m_\alpha}}$$

Θεώρημα έργου - ενέργειας
Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια είναι ίση με το έργο της δύναμης του πεδίου
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{q_p}{m_p} = 2\cdot\frac{q_\alpha}{m_\alpha}$, βρίσκουμε τον λόγο των μέτρων των ταχυτήτων

$$\frac{\upsilon_p}{\upsilon_\alpha} = \sqrt{2}\,, \quad \text{δηλαδή} \quad \upsilon_p > \upsilon_\alpha$$

Τα σωματίδια μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο θα εκτελέσουν σύνθετη κίνηση και στον άξονα y θα έχουν επιτάχυνση $\vec{\alpha}_p$ και $\vec{\alpha}_\alpha$ αντίστοιχα, όπου



$$\alpha_p = \frac{F}{m_p} = \frac{Eq_p}{m_p} \quad \text{και} \quad \alpha_\alpha = \frac{F'}{m_\alpha} = \frac{Eq_\alpha}{m_\alpha}$$

με λόγο

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_\alpha} = 2\,, \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha_p > \alpha_\alpha$$

Οι χρόνοι παραμονής των σωματιδίων μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο βρίσκονται από την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση που εκτελούν στον άξονα x. Ισχύει

$$t_p = \frac{d}{\upsilon_p} \quad \text{και} \quad t_\alpha = \frac{d}{\upsilon_\alpha}$$

Ο χρόνος παραμονής του πρωτονίου στο πεδίο είναι μικρότερος από εκείνον του σωματίου α.

(στο σημείο εξόδου η οριζόντια μετατόπιση από το σημείο εισόδου είναι ίση με το μήκος των πλακών).

Ο λόγος των χρόνων παραμονής μέσα στο πεδίο είναι

$$\frac{t_p}{t_\alpha} = \frac{\frac{d}{\upsilon_p}}{\frac{d}{\upsilon_\alpha}} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_p} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{t_p}{t_\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad \text{δηλαδή} \quad t_p < t_\alpha$$

β) Οι κατακόρυφες αποκλίσεις των σωματιδίων βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$y_p = \frac{1}{2}\alpha_p t_p^2 \quad \text{και} \quad y_\alpha = \frac{1}{2}\alpha_\alpha t_\alpha^2$$

*Τα **σωματίδια παρουσιάζουν την ίδια κατακόρυφη απόκλιση**, δηλαδή βγαίνουν από το ίδιο σημείο του πεδίου.*

και έχουν λόγο

$$\frac{y_p}{y_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_p t_p^2}{\frac{1}{2}\alpha_\alpha t_\alpha^2} = \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_\alpha}\right)\left(\frac{t_p}{t_\alpha}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{y_p}{y_\alpha} = 1}$$

γ) Στη θέση εξόδου τα σωματίδια θα έχουν κατακόρυφες συνιστώσες ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{y(p)}$ και $\vec{\upsilon}_{y(\alpha)}$ με μέτρα

$$\upsilon_{y(p)} = \alpha_p t_p \quad \text{και} \quad \upsilon_{y(\alpha)} = \alpha_\alpha t_\alpha$$

και λόγο

$$\frac{\upsilon_{y(p)}}{\upsilon_{y(\alpha)}} = \frac{\alpha_p}{\alpha_\alpha} \cdot \frac{t_p}{t_\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Οι ταχύτητες εξόδου των σωματιδίων από το πεδίο έχουν μέτρα

$$\upsilon'_p = \sqrt{\upsilon_p^2 + \upsilon_{y(p)}^2} \quad \text{και} \quad \upsilon'_\alpha = \sqrt{\upsilon_\alpha^2 + \upsilon_{y(\alpha)}^2}$$

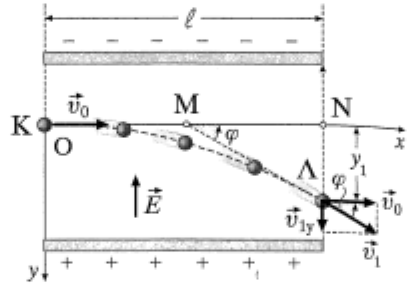
Το πρωτόνιο βγαίνει από το πεδίο με μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με το σωμάτιο α.

Αλλά είναι $\upsilon_p = \upsilon_\alpha\sqrt{2}$ και $\upsilon_{y(p)} = \upsilon_{y(\alpha)}\sqrt{2}$, οπότε

$$\upsilon'_p = \sqrt{2\upsilon_\alpha^2 + 2\upsilon_{y(\alpha)}^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\upsilon_\alpha^2 + \upsilon_{y(\alpha)}^2} \quad \text{ή} \quad \upsilon'_p = \sqrt{2} \cdot \upsilon'_\alpha \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\frac{\upsilon'_p}{\upsilon'_\alpha} = \sqrt{2}}, \quad \text{δηλαδή} \quad \upsilon'_p > \upsilon'_\alpha$$

12.7 **Ένα ηλεκτρόνιο, κινούμενο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργούν δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες. Να αποδείξετε ότι στη θέση εξόδου του ηλεκτρονίου από το πεδίο η διεύθυνση της ταχύτητας τέμνει τον άξονα x στο μέσο Μ της οριζόντιας μετατόπισης που αντιστοιχεί στο σημείο εξόδου.**



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το ηλεκτρόνιο εκτελεί μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο σύνθετη κίνηση.

- **Στον άξονα** x: ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με $\vec{\upsilon}_x = \vec{\upsilon}_0$, οπότε

$$x = \upsilon_0 t$$

- **Στον άξονα** y: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα, με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_y$. Στον άξονα αυτό ισχύουν:

$$\upsilon_y = \alpha_y t \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2}\alpha_y t^2$$

Τη **στιγμή** t_1 **της εξόδου** του ηλεκτρονίου από το πεδίο (θέση Λ) από το τρίγωνο των ταχυτήτων παίρνουμε:

$$\text{εφ}\phi = \frac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_0} \quad \text{ή} \quad \text{εφ}\phi = \frac{\alpha_y t_1}{\upsilon_0} \qquad (1)$$

και από το τρίγωνο ΜΝΛ παίρνουμε:

$$\text{εφ}\phi = \frac{(\text{ΝΛ})}{(\text{ΜΝ})} = \frac{y_1}{(\text{ΜΝ})} \quad \text{ή} \quad \text{εφ}\phi = \frac{\frac{1}{2}\alpha_y t_1^2}{(\text{ΜΝ})} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\alpha_y t_1}{\upsilon_0} = \frac{\frac{1}{2}\alpha_y t_1^2}{(\text{ΜΝ})} \quad \text{ή} \quad (\text{ΜΝ}) = \frac{1}{2}\upsilon_0 t_1$$

Αλλά για το σημείο εξόδου είναι $x = \ell$, δηλαδή $\ell = \upsilon_0 t_1$, οπότε

$$\boxed{(\text{ΜΝ}) = \frac{1}{2}\ell}$$

δηλαδή το Μ είναι το μέσο της οριζόντιας μετατόπισης ΚΝ.