

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Η έννοια του συνόλου)

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόηση μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο. Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου. Έτσι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι:

- **Διακεκριμένα**, δηλαδή κάθε στοιχείο του συνόλου να είναι διαφορετικό από τα άλλα,
- **Καλά ορισμένα**, δηλαδή όταν έχουμε ένα σύνολο και ένα στοιχείο, να μπορούμε να απαντήσουμε αν το στοιχείο αυτό είναι ή όχι στοιχείο του συνόλου.

ΘΕΩΡΙΑ 2

Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο του συνόλου ανήκει σε ένα σύνολο A , γράφουμε $x \in A$, ενώ όταν ένα στοιχείο δεν ανήκει γράφουμε $x \notin A$.

Βασικά σύνολα αριθμών

- **Φυσικοί αριθμοί** είναι οι $0, 1, 2, 3, \dots$. Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$.
- **Ακέραιοι αριθμοί** είναι οι $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Το σύνολο των ακέραιων αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$.
- **Ρητοί αριθμοί** είναι οι αριθμοί που γράφονται σε μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\beta \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.
- **Πραγματικοί αριθμοί** είναι οι αριθμοί που είναι είτε ρητοί είτε άρρητοι. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (Παράσταση συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του)

Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

- (α) των μονοψήφιων περιττών φυσικών αριθμών,
(β) των ακέραιων από το 1 μέχρι το 100,
(γ) των ακέραιων που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 20.

ΛΥΣΗ

- (α) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
(β) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$
(α) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $\Gamma = \{20, 21, 22, 23, \dots\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (Παράσταση συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του)

Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

- (α) των άρτιων ακέραιων αριθμών,
(β) των ρητών αριθμών από το 7 μέχρι το 21,
(γ) των πραγματικών αριθμών που είναι μικρότεροι του -10.

ΛΥΣΗ

- (α) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ είναι άρτιος}\}$

(β) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $B = \{x \in \mathbb{Q} / 7 \leq x \leq 21\}$

(γ) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $A = \{x \in \mathbb{R} / x < -10\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 (Ισα σύνολα)

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Δηλαδή $A = B$, όταν:

- Για κάθε $x \in A$ ισχύει και $x \in B$ και
- Για κάθε $x \in B$ ισχύει και $x \in A$ ή ισοδύναμα

$A = B$ όταν $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να εξετάσετε αν είναι ίσα τα σύνολα:

$A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 1\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 = x\}$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι: $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$. Επίσης έχουμε: $x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$. Άρα το $B = \{-1, 0, 1\}$.
Επομένως τα σύνολα A και B είναι ίσα.

ΘΕΩΡΙΑ 4 (Κενό σύνολο)

Κενό λέγεται το σύνολο το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο. Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\emptyset$ ή με $\{\}$ και είναι μοναδικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να εξετάσετε αν είναι το σύνολο: $A = \{x \in \mathbb{Z} / (2x-3)(4x+3) = 0\}$ είναι το κενό σύνολο.

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι: $(2x-3)(4x+3) = 0 \Leftrightarrow 2x-3=0$ ή $4x+3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ή $x = -\frac{3}{4}$.

Όμως οι αριθμοί $\frac{3}{2}, -\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$. Κατά συνέπεια $A = \{x \in \mathbb{Z} / (2x-3)(4x+3) = 0\} = \emptyset$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 (Υποσύνολα συνόλου)

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B. Με σύμβολα είναι $A \subseteq B$. Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι:

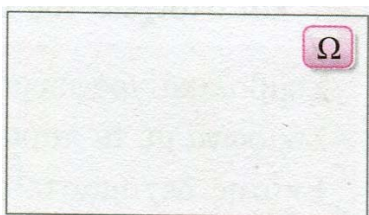
- $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A.
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$, τότε το A λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του B.

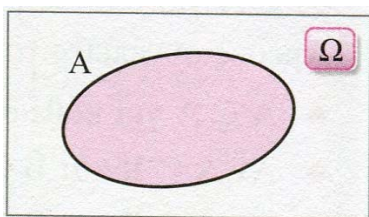
Για τα γνωστά σύνολα ισχύει ότι: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 (Διαγράμματα Venn)

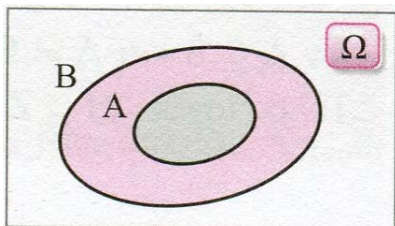
(1) Το βασικό σύνολο Ω παριστάνεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου.



(2) Ένα υποσύνολο A του βασικού συνόλου Ω παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης.



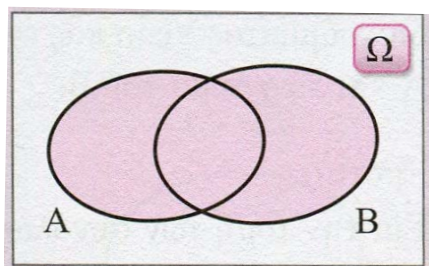
(3) Αν $A \subseteq B$, τότε το εσωτερικό της καμπύλης που παριστάνει το A βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης που παριστάνει το B .



ΘΕΩΡΙΑ 7 (Ένωση δύο συνόλων)

Έστω A και B δύο σύνολα. Ένωση των συνόλων A και B λέγεται το σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα A και B .

Συμβολίζεται $A \cup B$. Ισχύει: $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$.



Ιδιότητες

- $A \cup \emptyset = A$ και $A \cup A = A$
- Αν $A \cup B = B \cup A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$
- Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ και $\Gamma = \{6, 7\}$.

Να βρείτε τα σύνολα: (α) $A \cup B$, (β) $(A \cup B) \cup \Gamma$.

ΛΥΣΗ

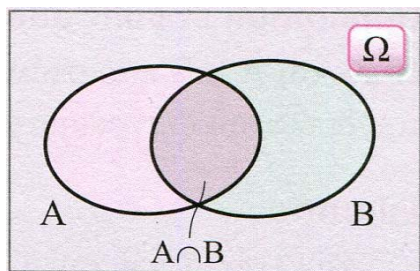
(α) Η ένωση των συνόλων είναι: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(β) Θέλουμε την ένωση των συνόλων $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $\Gamma = \{6, 7\}$, άρα $(A \cup B) \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 8 (Τομή δύο συνόλων)

Έστω A και B δύο σύνολα. Τομή των συνόλων A και B λέγεται το σύνολο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν συγχρόνως και στο A και στο B . Συμβολίζεται $A \cap B$.

Ισχύει: $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$.



Ιδιότητες

- $A \cap \emptyset = \emptyset$ και $A \cap A = A$
- Αν $A \cap B = B \cap A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
- Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$
- Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε τα σύνολα A, B λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $\Gamma = \{1, 2, 3\}$ και $\Delta = \{4, 5\}$.

Να βρείτε τα σύνολα: (α) $A \cap B$, (β) $\Gamma \cap \Delta$.

ΛΥΣΗ

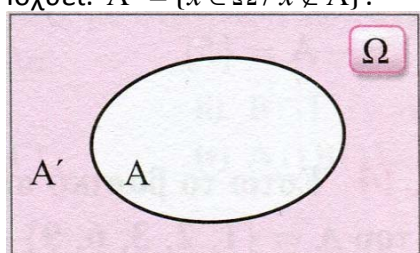
(α) Η τομή των συνόλων είναι: $A \cap B = \{3, 4\}$.

(β) Παρατηρούμε ότι τα σύνολα Γ, Δ δεν έχουν κοινά στοιχεία, άρα: $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

ΘΕΩΡΙΑ 9 (Συμπλήρωμα συνόλου)

Έστω Ω το βασικό σύνολο και A ένα υποσύνολο του. Συμπλήρωμα του A είναι το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A . Συμβολίζεται με A' .

Ισχύει: $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$.



Ιδιότητες

- $\Omega' = \emptyset$ και $\emptyset' = \Omega$
- Αν $A \cap A' = \emptyset$ και $A \cup A' = \Omega$
- Αν $(A')' = A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Με βασικό σύνολο το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, να βρείτε το συμπλήρωμα του συνόλου $A = \{2, 3, 5, 6\}$.

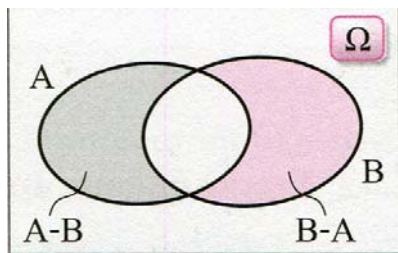
ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο σύνολο είναι: $A' = \{1, 4\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 10 (Διαφορά συνόλων)

Έστω A και B δύο σύνολα. Διαφορά $A - B$ είναι το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B . Συμβολίζεται με $A - B = A \cap B'$.

Ισχύει: $A - B = A \cap B' = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Αν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5\}$, να βρείτε τις διαφορές $A - B$ και $B - A$.

ΛΥΣΗ

Τα ζητούμενα σύνολα είναι: $A - B = \{1, 2\}$ και $B - A = \{5\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{1, 2, 3, 6, 9\}$ και $B = \{0, 6, 8, 9\}$. Να βρείτε τα σύνολα:

(α) $A \cup B$ (β) $A \cap B$ (γ) $A' \cap B$ (δ) $A' \cup B'$ (ε) $(A \cup B)'$ (στ) $(A' \cap B)'$

ΛΥΣΗ

(α) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8, 9\}$.

(β) Το ζητούμενο σύνολο είναι: $A \cap B = \{6, 9\}$.

(γ) Αρχικά υπολογίζουμε το $A' = \{0, 4, 5, 7, 8\}$, άρα $A' \cap B = \{0, 8\}$.

(δ) Υπολογίζουμε το $A' = \{0, 4, 5, 7, 8\}$ και το $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, άρα $A' \cup B' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.

(ε) Έχουμε $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8, 9\}$, άρα $(A \cup B)' = \{4, 5, 7\}$.

(στ) Ισχύει: $A' = \{0, 4, 5, 7, 8\}$ και $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, άρα $A' \cap B' = \{4, 5, 7\}$,
οπότε: $(A' \cap B')' = \{0, 1, 2, 3, 6, 8, 9\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 11

Αν σε κάποιο πείραμα δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες, ονομάζεται **πείραμα τύχης**.

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω . Αν $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$.

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** ή γεγονός.

Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**, ενώ το $\emptyset$ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A , θα το συμβολίζουμε με $N(A)$.
Επίσης $N(\Omega) = 1$, ενώ $N(\emptyset) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 (Προσδιορισμός Δειγματικού χώρου με δεντροδιάγραμμα)

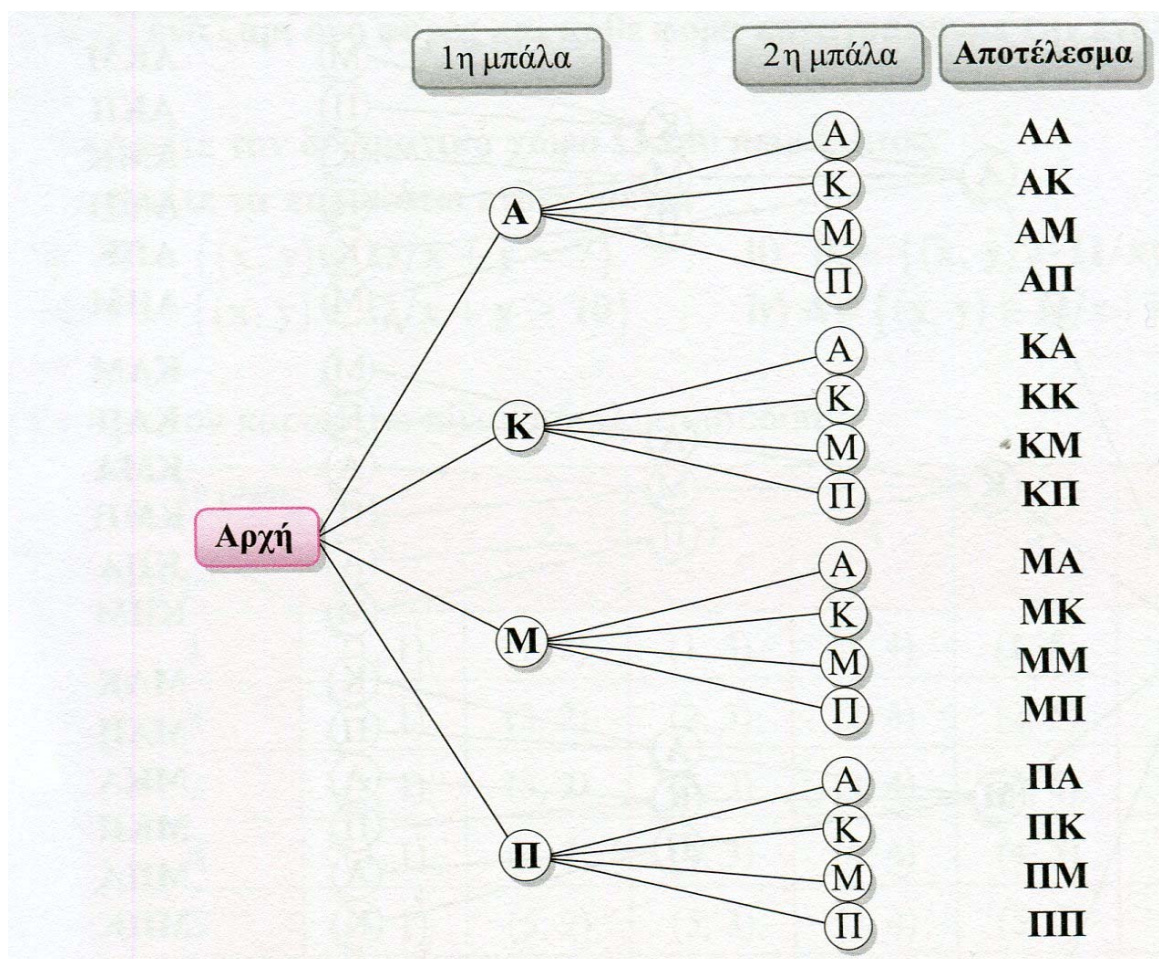
Σε ένα κουτί έχουμε 4 μπάλες, μια άσπρη, μια κόκκινη, μια μπλε και μια πράσινη.
Να βρείτε τον δειγματικό χώρο των παρακάτω πειραμάτων τύχης:

- (α) Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της.
(β) Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και δεν την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της και δεν την ξαναβάζουμε στο κουτί. Τέλος παίρνουμε μια Τρίτη μπάλα και καταγράφουμε το χρώμα της.

ΛΥΣΗ

Συμβολίζουμε με A , K , M , Π την άσπρη, την κόκκινη, την μπλε και την πράσινη μπάλα αντίστοιχα.

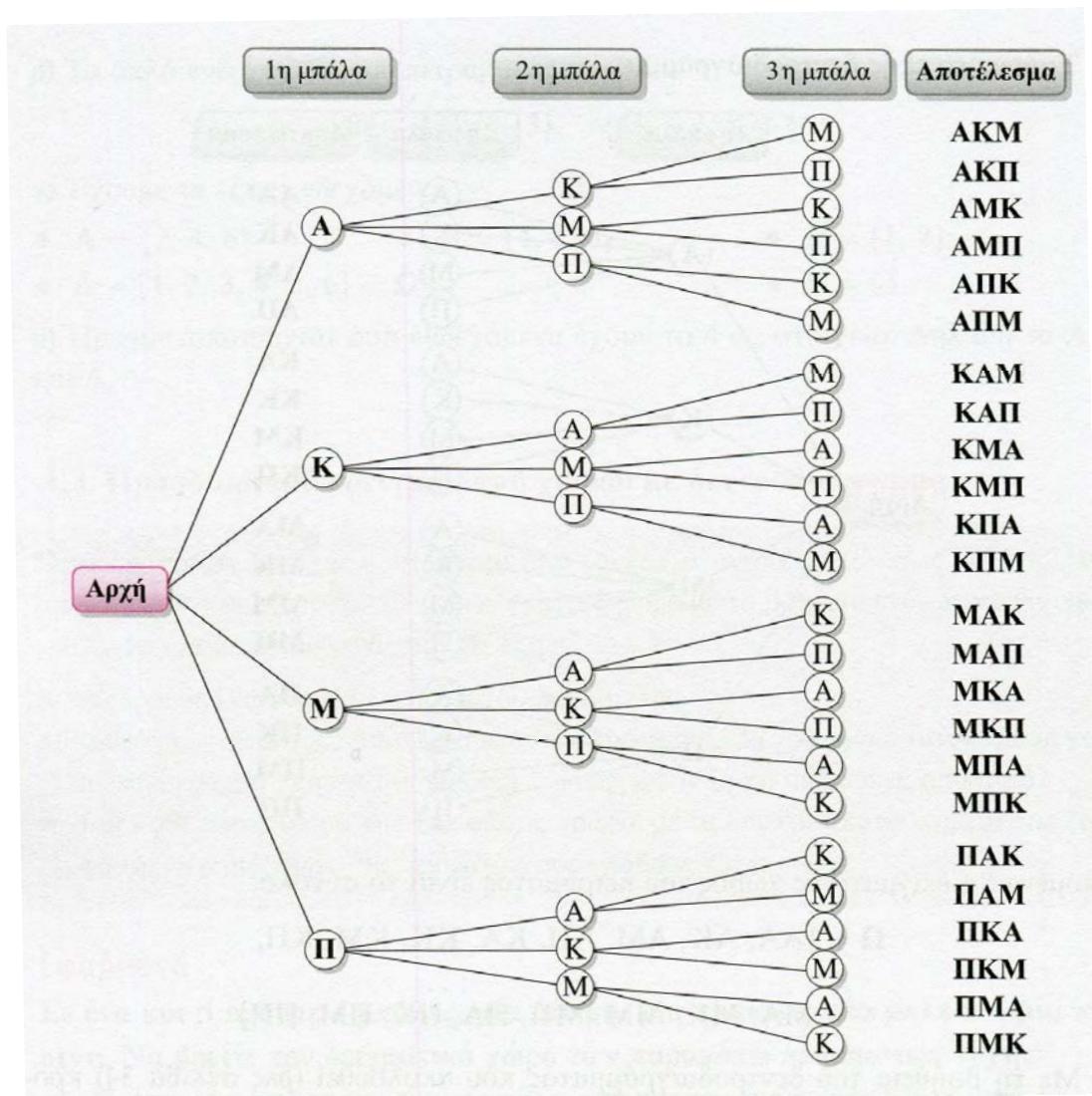
(α) Έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Επομένως ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{AA, AK, AM, ΑΠ, KA, KK, KM, ΚΠ, MA, MK, MM, ΜΠ, ΠΑ, ΠΚ, ΠΜ, ΠΠ\}$$

(β) Έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Επομένως ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο:

$\Omega = \{ΑΚΜ, ΑΚΠ, ΑΜΚ, ΑΜΠ, ΑΠΚ, ΑΠΜ, ΚΑΜ, ΚΑΠ, ΚΜΑ, ΚΜΠ, ΚΠΑ, ΚΠΜ, ΜΑΚ, ΜΑΠ, ΜΚΑ, ΜΚΠ, ΜΠΑ, ΜΠΚ, ΠΑΚ, ΠΑΜ, ΠΚΑ, ΠΚΜ, ΠΜΑ, ΠΜΚ\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 (Προσδιορισμός Δειγματικού χώρου με Πίνακα διπλής εισόδου)

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και κάθε φορά καταγράφουμε την ένδειξη της άνω έδρας.

(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

(β) Να βρείτε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

(i) $A = \{(x, y) \in \Omega / x + y = 7\}$ (ii) $B = \{(x, y) \in \Omega / x \cdot y < 5\}$

(iii) $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega / x + y \geq 10\}$ (iv) $\Delta = \{(x, y) \in \Omega / x + y = \text{περιττός}\}.$

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε το παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου:

2η ρίψη 1η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Άρα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$$

(β) Τα ζητούμενα ενδεχόμενα είναι:

(i) $A = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$.

(ii) $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$.

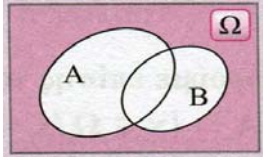
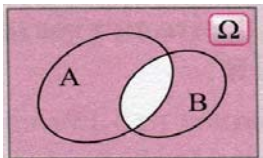
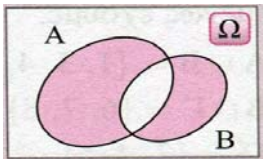
(iii) $\Gamma = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

(iv) $\Delta = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)\}$.

ΘΕΩΡΙΑ 12 (Πράξεις με Ενδεχόμενα)

Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω , τότε ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις:

Πράξη	Ορισμός	Γλωσσική Περιγραφή	Διάγραμμα Venn
Ένωση $A \cup B$	Ένωση των A και B λέγεται το ενδεχόμενο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν ή στο A ή στο B. Δηλαδή: $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B	
Τομή $A \cap B$	Τομή των A και B λέγεται το ενδεχόμενο του οποίου τα στοιχεία ανήκουν συγχρόνως στο A και στο B. Δηλαδή: $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	
Συμπλήρωμα A'	Συμπλήρωμα του A λέγεται το ενδεχόμενο του οποίου τα στοιχεία δεν ανήκουν στο A. Δηλαδή: $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$	Δεν πραγματοποιείται το A	
Διαφορά $A - B = A \cap B'$	Διαφορά λέγεται το ενδεχόμενο που έχει στοιχεία τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. Δηλαδή: $A \cap B' = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}$	Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B, ή αλλιώς πραγματοποιείται μόνο το A	

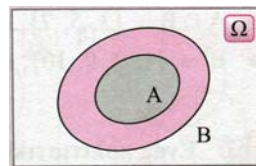
Πράξη	Γλωσσική Περιγραφή	Διάγραμμα Venn
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.	
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B, ή αλλιώς: τουλάχιστον ένα από τα A και B δεν πραγματοποιείται, ή αλλιώς: το πολύ ένα από τα A και B πραγματοποιείται.	
$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$	Πραγματοποιείται μόνο ένα τα A και B.	

ΘΕΩΡΙΑ 13

Ίσα Σύνολα – Υποσύνολο

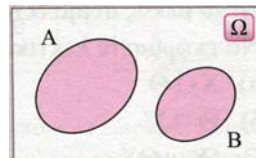
(α) Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα** όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και γράφουμε $A = B$.

(β) Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B και γράφουμε $A \subseteq B$, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Αν $A \subseteq B$, τότε έχουμε: $A \cup B = B$ και $A \cap B = A$.



Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** μεταξύ τους ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**, όταν ισχύει: $A \cap B = \emptyset$.



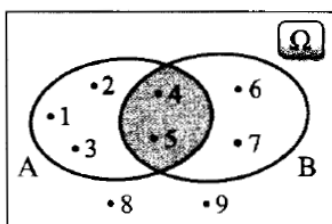
Ιδιότητες

- $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$ και $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
- $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ και $A \cap B \subseteq A \cup B$
- Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$ και $A \cup B = B$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα Venn.



Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα επόμενα σύνολα:

(α) A (β) B (γ) $A \cup B$ (δ) $A \cap B$ (ε) Ω (στ) A' (ζ) B' (η) $(A \cap B)'$

Άσκηση 2

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και τα υποσύνολα του $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 4\}$. Να βρείτε τα σύνολα:

(α) $A \cup B$ (β) $A \cap B$ (γ) A' (δ) B' (ε) $(A \cup B)'$ (στ) $(A \cap B)'$
(ζ) $A' \cap B$ (η) $A \cap B'$.

Άσκηση 3

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ και $\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$. Να βρείτε τις διαφορές:

(α) $A - B$ (β) $B - A$ (γ) $B - \Gamma$ (δ) $\Gamma - B$ (ε) $A - \Gamma$ (στ) $\Gamma - A$.

Άσκηση 4

Δίνεται το βασικό σύνολο $\Omega = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$ και τα υποσύνολα του $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 5\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \leq 8\}$. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα επόμενα σύνολα:

(α) $A \cup B$ (β) $A \cap B$ (γ) A' (δ) B' (ε) $(A \cup B)'$ (στ) $(A \cap B)'$
(ζ) $A' \cap B'$ (η) $A' \cup B'$ (θ) $(A \cap B')'$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε ως βασικό σύνολο το $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ και τα υποσύνολα του $A = \{x \in \Omega / x \text{ είναι άρτιος}\}$, $B = \{x \in \Omega / x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$.

(α) Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.
(β) Να βρείτε τα σύνολα: (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) A' (iv) B'
(v) $(A \cup B)'$ (vi) $A \cap B'$.

Άσκηση 6

Να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $A \subseteq A \cup B$ (β) $B \subseteq A \cap B$ (γ) $A \cap B \subseteq A$ (δ) $A \cup B \subseteq B$ (ε) $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Άσκηση 7

Δίνεται το σύνολο $A = \{0, 1\}$. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $0 \in A$ (β) $0 \subseteq A$ (γ) $\{1\} \in A$ (δ) $\{1\} \subseteq A$ (ε) $A = \{0\} \cup \{1\}$ (στ) $\{0, 1\} \subseteq A$.

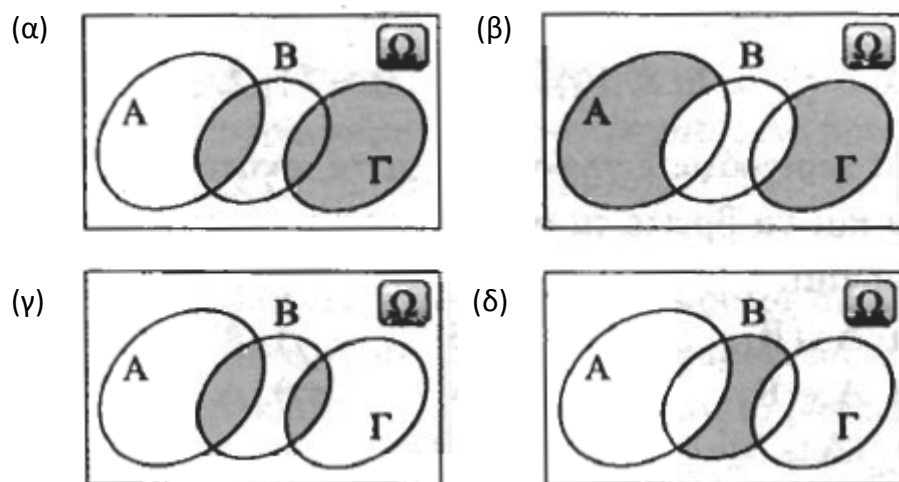
Άσκηση 8

Δίνεται το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \{\gamma, \delta\}\}$. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $\{\alpha, \beta\} \subseteq A$ (β) $\{\gamma, \delta\} \subseteq A$ (γ) $\{\alpha\} \in A$ (δ) $\{\gamma, \delta\} \in A$.

Άσκηση 9

Να γράψετε με τη βοήθεια των συνόλων $A, B, \Gamma, A', B', \Gamma'$ τα ενδεχόμενα που είναι χρωματισμένα σε καθένα από τα παρακάτω διάγραμμα Venn.



Άσκηση 10

Από τους μαθητές της Α' Λυκείου ενός σχολείου κάποιοι μιλούν πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή για να εκπροσωπήσει την τάξη σε μια εκδήλωση του τμήματος Γαλλικής Φιλοσοφίας. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα: A: ο μαθητής είναι κορίτσι, B: ο μαθητής μιλάει πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα, να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

(α) $A \cup B$ (β) $A \cap B$ (γ) $B - A$ (δ) $A - B$ (ε) A' (στ) $A' \cup B$.

Άσκηση 11

Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξη της άνω έδρας. Θεωρούμε και τα ενδεχόμενα:

A: ο αριθμός είναι περιττός, B: ο αριθμός είναι τουλάχιστον ίσος με 3.

(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω , καθώς και τα ενδεχόμενα A, B.

(β) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των παρακάτω ενδεχομένων:

(i) Πραγματοποιείται το A ή το B, (ii) Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B,

(iii) Δεν πραγματοποιείται το A, (iv) Πραγματοποιείται το A, αλλά όχι το B,

(v) Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B, (vi) Πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B.

Άσκηση 12

Δίνεται ο δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ και τα ενδεχόμενα:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Να περιγράψετε γλωσσικά τα παρακάτω

ενδεχόμενα και να βρείτε τα στοιχεία από τα οποία αποτελούνται:

(α) $A \cup B$ (β) $A \cap B$ (γ) A' (δ) $A - B$ (ε) $B \cap A'$ (στ) $A' \cup B$

(ζ) $(A \cup B)'$ (η) $(A \cap B)'$ (θ) $(A - B) \cup (B - A)$.

Άσκηση 13

Δίνεται ο δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ και τα ενδεχόμενα:

$A = \{\lambda \in \Omega / 2 < \lambda \leq 7\}$ και $B = \{\lambda \in \Omega / \lambda < 5\}$.

(α) Να βρείτε τα ενδεχόμενα A και B.

(β) Να βρείτε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

(i) Πραγματοποιείται το A ή το B, (ii) Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B, (iii) Δεν πραγματοποιείται το B, (iv) Πραγματοποιείται το B, αλλά όχι το A, (v) Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B, (vi) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B.

Άσκηση 14

Ρίχνουμε πρώτα ένα ζάρι και μετά ένα νόμισμα και καταγράφουμε τα αποτελέσματα. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Άσκηση 15

Μια ομάδα μπάσκετ συμμετείχε σε ένα τουρνουά και έδωσε 3 αγώνες. Να βρείτε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που θα μπορούσε να έχει φέρει η ομάδα. (Τα δυνατά αποτελέσματα σε ένα αγώνα μπάσκετ είναι νίκη ή ήττα).

Άσκηση 16

Μια ομάδα ποδοσφαίρου έπαιξε σε δύο αγώνες. Να βρείτε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που θα μπορούσε να έχει φέρει η ομάδα. (Τα δυνατά αποτελέσματα σε ένα αγώνα ποδοσφαίρου είναι νίκη, ισοπαλία ή ήττα).

Άσκηση 17

Σε έναν αγώνα ποδηλασίας τρέχουν τρεις αθλητές: ο Αντρέας, ο Βασίλης και ο Γιώργος.

- (α) Να βρείτε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του αγώνα.
(β) Να βρείτε το ενδεχόμενο, K: ο Βασίλης τερμάτισε δεύτερος.

Άσκηση 18

Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα (κεφαλή ή γράμματα).

(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

(β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

A: να εμφανιστεί τουλάχιστον 1 φορά κεφαλή,

B: να εμφανιστούν γράμματα στην 1^η ρίψη,

Γ: να εμφανιστεί ακριβώς 1 φορά κεφαλή,

Δ: να εμφανιστεί η ίδια ένδειξη και τις δύο φορές.

(γ) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Γ και Δ είναι ασυμβίβαστα.

Άσκηση 19

Σε ένα κουτί υπάρχουν 3 σφαίρες, μια κόκκινη, μια λευκή και μια μπλε. Επιλέγουμε στην τύχη μια σφαίρα, καταγράφουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια επιλέγουμε στην τύχη άλλη μια σφαίρα και καταγράφουμε το χρώμα της. Να βρείτε:

(α) Τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος,

(β) Το ενδεχόμενο να επιλέξουμε σφαίρες του ίδιου χρώματος,

(γ) Το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τουλάχιστον μια κόκκινη σφαίρα,

(δ) Το ενδεχόμενο να μην επιλέξουμε λευκή σφαίρα,

(ε) Το ενδεχόμενο να επιλέξουμε ακριβώς μια μπλε σφαίρα.

Άσκηση 20

Μια δισκογραφική εταιρεία ελέγχει τα CD που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD.

(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος,

(β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

(i) A: να βρεθεί το πολύ 1 ελαττωματικό CD,

(ii) B: να βρεθούν ακριβώς 2 ελαττωματικά CD,

(iii) Γ : να ελεγχθούν συνολικά 4 CD.

(γ) Να βρείτε τα ενδεχόμενα $B \cap \Gamma$ και $\Gamma - A$.

Άσκηση 21

Δύο ομάδες A και B παίζουν μεταξύ τους μπάσκετ. Νικήτρια θα αναδειχθεί η ομάδα που θα νικήσει σε 2 αγώνες στη σειρά ή σε 3 αγώνες συνολικά.

(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος,

(β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

K: να αναδειχθεί νικήτρια η ομάδα A,

Λ: η ομάδα B να κερδίσει τουλάχιστον 2 παιχνίδια,

$K \cap \Lambda$

(γ) Να βρείτε τα ενδεχόμενα

Π: να γίνουν το πολύ 5 αγώνες,

Λ: να γίνουν ακριβώς 3 αγώνες,

N: να γίνουν τουλάχιστον 4 αγώνες.