

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Ιδιότητες Πρόσθεσης και Πολλαπλασιασμού)

Παρακάτω παραθέτουμε τις Ιδιότητες της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$	

(α) Το **ουδέτερο** στοιχείο της πρόσθεσης είναι το 0, διότι ισχύει: $\alpha + 0 = \alpha$.

Δύο αριθμοί α και β λέγονται **αντίθετοι**, όταν έχουν άθροισμα μηδέν, δηλαδή ισχύει: $\alpha + \beta = 0$. Ο αντίθετος του αριθμού α είναι το $-\alpha$.

(β) Το **ουδέτερο** στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το 1, διότι ισχύει: $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

Δύο αριθμοί α και β (διάφοροι του μηδενός) λέγονται **αντίστροφοι**, όταν έχουν γινόμενο τη μονάδα, δηλαδή ισχύει: $\alpha \cdot \beta = 1$. Ο αντίστροφος του αριθμού $\alpha \neq 0$

είναι ο $\frac{1}{\alpha}$.

(γ) Η **διαφορά** δύο αριθμών α και β ορίζεται ως εξής: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, άρα για τη διαφορά ισχύει: προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

(δ) Το **πηλίκο** δύο αριθμών α και β , με $\beta \neq 0$, ορίζεται ως εξής:

$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, $\beta \neq 0$, άρα για το πηλίκο: πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με

τον αντίστροφο του διαιρέτη.

ΘΕΩΡΙΑ 2

(α) Μπορούμε στα δύο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

(β) Μπορούμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό. Δηλαδή:

Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$.

(γ) Μπορούμε να **προσθέσουμε** κατά μέλη δύο ισότητες. Δηλαδή:

Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

(δ) Μπορούμε να **πολλαπλασιάσουμε** κατά μέλη δύο ισότητες. Δηλαδή:

Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 ($\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$(2x - 6)(3x + 12) = 0.$$

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε: } (2x - 6)(3x + 12) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \text{ ή } 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \text{ ή } 3x = -12$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -4.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 ($\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$(y + 3)(18 - 3y) \neq 0.$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $(y+3)(18-3y) \neq 0 \Leftrightarrow y+3 \neq 0$ και $18-3y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -3$ και $-3y \neq -18$
 $\Leftrightarrow y \neq -3$ και $y \neq 6$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 (Πράξεις μεταξύ κλασμάτων)

Έχουμε τις παρακάτω πράξεις μεταξύ κλασμάτων:

$$\begin{aligned}(\alpha) \frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} &= \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}, (\beta) \frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\gamma}, (\gamma) \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \\(\delta) \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, (\epsilon) \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}.\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΙΑ 4 (Άρτιοι και περιττοί αριθμοί – Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού)

Άρτιοι και περιττοί αριθμοί

(α) Ένας ακέραιος αριθμός λέγεται **άρτιος**, όταν διαιρείται με το 2 ή είναι πολλαπλάσιο του 2. Τον συμβολίζουμε: 2κ , όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

(β) Ένας ακέραιος αριθμός λέγεται **περιττός**, όταν δεν διαιρείται με το 2. Τον συμβολίζουμε: $2\kappa+1$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Πολλαπλάσια ακεραίου αριθμού

(α) Ένας ακέραιος αριθμός β είναι πολλαπλάσιο του ακεραίου α , όταν έχει τη μορφή: $\beta = \lambda \cdot \alpha$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(β) Ένας ακέραιος αριθμός β δεν είναι πολλαπλάσιο του ακεραίου α , όταν έχει τη μορφή: $\beta = \lambda \cdot \alpha + \nu$, όπου $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}$ με $1 \leq \nu < |\alpha|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

(α) Ένας ακέραιος αριθμός β είναι πολλαπλάσιο του 4, όταν έχει τη μορφή: $\beta = 4\lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(β) Ένας ακέραιος αριθμός β δεν είναι πολλαπλάσιο του 4, όταν έχει τις μορφές: $\beta = 4\lambda+1$ ή $\beta = 4\lambda+2$ ή $\beta = 4\lambda+3$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 (Ορισμός δύναμης πραγματικού αριθμού)

Η δύναμη ενός πραγματικού αριθμού α με εκθέτη έναν φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ συμβολίζεται με α^ν και είναι ένα γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α .

Δηλαδή: $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$. Επίσης ισχύουν:

$$(\alpha) \alpha^1 = \alpha, (\beta) \alpha^0 = 1, \text{ με } \alpha \neq 0, (\gamma) \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}, \text{ με } \alpha \neq 0.$$

ΘΕΩΡΙΑ 6 (Ιδιότητες δυνάμεων)

$$(\alpha) \alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}, (\beta) \alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda} \text{ ή } \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$(\gamma) \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa = (\alpha \cdot \beta)^\kappa, (\delta) \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\kappa$$

$$(\epsilon) \left(\alpha^\kappa \right)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 7

Ισχύει ότι: Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^v = \beta^v$, το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης, δηλαδή:

Αν $\alpha^v = \beta^v$ τότε το $\alpha = \beta$ δεν ισχύει πάντα.

Για παράδειγμα είναι $(-2)^2 = 2^2$, όμως $-2 \neq 2$.

Γενικά ισχύει ότι: Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha, \beta \neq 0$.

Αν $\alpha^v = \beta^v$, τότε
$$\begin{cases} \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ \alpha = \beta, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Αν v είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = 3^v + 3^{v+2}$, είναι πολλαπλάσιο του 10.

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $x = 3^v + 3^{v+2} = 3^v + 3^v \cdot 3^2 = 3^v \cdot (1+9) = 10 \cdot 3^v = 10 \cdot \rho$. Άρα είναι $x = 10 \cdot \rho$, όπου $\rho = 3^v$ είναι φυσικός αριθμός. Επομένως ο αριθμός x είναι πολλαπλάσιο του 10.

ΘΕΩΡΙΑ 8 (Αξιοσημείωτες Ταυτότητες)

Οι πιο γνωστές ταυτότητες είναι:

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$.

ΘΕΩΡΙΑ 9 (Μέθοδος απαγωγής σε άτοπο)

Σε αυτή την μέθοδο υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός που θέλουμε να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει και χρησιμοποιώντας ισοδυναμίες καταλήγουμε σε κάτι που γνωρίζουμε ότι δεν ισχύει. Οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α . Αν ο αριθμός $\alpha^2 + 2\alpha$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι και ο α είναι άρτιος.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι ο αριθμός δεν είναι άρτιος. Οπότε ο α είναι περιττός, άρα έχει την μορφή: $\alpha = 2v+1$, όπου $v \in \mathbb{Z}$. Έχουμε: $\alpha^2 + 2\alpha = (2v+1)^2 + 2(2v+1) = 4v^2 + 4v + 1 + 4v + 2 = 4v^2 + 8v + 3 = 2(2v^2 + 4v + 1) + 1 = 2\rho + 1$, όπου $\rho = 2v^2 + 4v + 1$ ακέραιος. Δηλαδή ο αριθμός $\alpha^2 + 2\alpha$ έχει την μορφή $2\rho + 1, \rho \in \mathbb{Z}$, άρα είναι περιττός. Καταλήξαμε σε άτοπο, διότι έχουμε ως δεδομένο ότι ο $\alpha^2 + 2\alpha$ είναι άρτιος.

ΘΕΩΡΙΑ 10 (Αντιπαράδειγμα)

Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι ισχύει. Αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα ώστε να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός: Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι: $\alpha^3 > \alpha^2$, δεν είναι αληθής.

ΛΥΣΗ

Ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \frac{1}{2}$ είναι: $\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ και ε :

$$\alpha^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \text{ δηλαδή είναι } \alpha^2 > \alpha^3.$$

ΘΕΩΡΙΑ 11

Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Απόδειξη

Με ισοδυναμίες έχουμε: $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\gamma \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^3 = (-\gamma)^3 \Leftrightarrow \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = -\gamma^3 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha\beta(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha\beta(-\gamma) \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = (x+2y)^3 + (3x-5y)^3 + (3y-4x)^3$

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $\alpha = x+2y$, $\beta = 3x-5y$ και $\gamma = 3y-4x$, τότε έχουμε:

$\alpha + \beta + \gamma = x+2y+3x-5y+3y-4x = 0$. Άρα έχουμε:

$$A = (x+2y)^3 + (3x-5y)^3 + (3y-4x)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma = 3(x+2y)(3x-5y)(3y-4x).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) (2x+5)^3 + (3-5x)^3 + (3x-8)^3 = 0, (\beta) (x-5)^3 + 8(x+1)^3 - 27(x-1)^3 = 0$$

ΛΥΣΗ

(α) Αν θέσουμε $\alpha = 2x+5$, $\beta = 3-5x$ και $\gamma = 3x-8$, τότε έχουμε:

$\alpha + \beta + \gamma = 2x-5x+3x+5+3-8 = 0$. Άρα έχουμε:

$$(2x+5)^3 + (3-5x)^3 + (3x-8)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma = 3(2x+5)(3-5x)(3x-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+5=0 \text{ ή } 3-5x=0 \text{ ή } 3x-8=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \text{ ή } x=\frac{3}{5} \text{ ή } x=\frac{8}{3}.$$

(β) Έχουμε:

$$(x-5)^3 + 8(x+1)^3 - 27(x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^3 + 2^3(x+1)^3 + (-3)^3(x-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^3 + [2(x+1)]^3 + [(-3)(x-1)]^3 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^3 + (2x+2)^3 + (-3x+3)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-5)(2x+2)(-3x+3) = 0 \Leftrightarrow x-5=0 \text{ ή } 2x+2=0 \text{ ή } -3x+3=0 \Leftrightarrow x=5$$

$$\text{ή } x=-1 \text{ ή } x=1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) A = \frac{-5 \cdot 3 - 2 \cdot (-7) + 3}{5 \cdot 7 - 4 \cdot 9} \quad (\beta) B = \frac{-4 \cdot (-8) + 6 \cdot (-7) - 11 \cdot 0}{9 \cdot (-5) - 3 \cdot 7 - 8 \cdot (-7)} \quad (\gamma) A = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$(\delta) B = \frac{3 \cdot \frac{2}{5} - 1}{2 \cdot \frac{3}{5} + 1} \quad (\epsilon) Z = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{-2 + \frac{3}{2}}.$$

Άσκηση 2

Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων, όταν $x = \frac{1}{4}$ και $y = -\frac{1}{2}$:

$$(\alpha) A = -3(1 - 2x) - 2(3y + 2) - 2(-x - 2y) \quad (\beta) B = -5(-2x - 3y) - 6(2y - x) - 3y.$$

Άσκηση 3

Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων, όταν $\alpha = -2$ και $\beta = -\frac{1}{3}$:

$$(\alpha) A = -[-2(4\alpha - 3\beta) - 3(5\beta - 4\alpha)] \quad (\beta) B = 5\alpha - 4[10\alpha - 3(\alpha - \beta) - 6(\alpha + \beta)].$$

Άσκηση 4

Αν $x + y = -\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$(\alpha) A = -5(-4x - 2y) - 2(2x - 3y) \quad (\beta) B = -x(y + 2) - [x(-y - 3) - (-y - 2x)].$$

Άσκηση 5

Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2(\alpha - 3\beta) - 5[\beta(\alpha - 1) - 1] - \alpha(3 - 5\beta).$$

Άσκηση 6

Αν οι αριθμοί x και y είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3(x - 1) - 2(y + x) - (1 - 3y)}{2 - [y(1 - x) - x(-y - 1)]}.$$

Άσκηση 7

Αν ο αριθμός α είναι ακέραιος, να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιοι και ποιοι περιττοί:

$$(\alpha) 2\alpha, (\beta) 2\alpha + 1, (\gamma) 2\alpha + 6, (\delta) 2\alpha + 11, (\epsilon) 4\alpha - 18, (\sigma\tau) 6\alpha - 3.$$

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν οι αριθμοί α και β είναι άρτιοι, τότε και ο $\alpha + \beta$ είναι άρτιος,

(β) Αν οι αριθμοί α και β είναι περιττοί, τότε ο $\alpha + \beta$ είναι άρτιος.

Άσκηση 9

Αν ισχύουν οι σχέσεις: $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{5}$ και $\alpha + \beta = 40$, να βρείτε τους αριθμούς α και β .

Άσκηση 10

Οι αριθμοί x, y, ω είναι ανάλογοι των αριθμών 2, 3, 4. Αν ισχύει: $x + y + \omega = 36$, να βρείτε τους αριθμούς x, y, ω .

Άσκηση 11

Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι και οι αριθμοί γ, δ είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \delta - [-\alpha - (\beta + 3)] - \delta(\gamma + 1)$.

Άσκηση 12

Οι αριθμοί $\alpha = x - 3y - 2$ και $\beta = 2y - 1$ είναι αντίθετοι.

(α) Να αποδείξετε ότι: $x - y = 3$.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{-2[-(3y - 2x) - (x - 2y)]}{-4x - [-(y + 3x - 1) - 2(x - y)]}$.

Άσκηση 13

Για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{6}$ και $3\alpha + 2\beta = 2$

(α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = -2\{-2\alpha - 2[-\alpha(\beta - 2) - \beta(1 - \alpha)]\}$.

Άσκηση 14

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $A = (-2)^2 + (-2)^3 - (-2)^4$, (β) $B = (-3)^3 + (-3)^2 + (-2)^2$,

(γ) $\Gamma = (-1)^{15} + (-1)^{20} + 1^{25} + 0^{30} + 40^0$, (δ) $3^7 \cdot 3^{-5}$, (ε) $2^{-9} \cdot 2^{12}$, (στ) $\frac{4^{21}}{4^{19}}$, (ζ) $\frac{32^4}{16^4}$.

Άσκηση 15

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $(-2)^9 : 2^5$, (β) $3^{11} : (-3)^8$, (γ) $(-2)^{15} : (-2)^{10}$, (δ) $((-2)^3)^5 \cdot (2^{-4})^3$.

Άσκηση 16

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$, (β) $B = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 2^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

(γ) $\Gamma = 2^{12} \cdot 8^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, (δ) $\Delta = 3^5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^8 \cdot 27^3$, (ε) $E = (2^{16} 8^{-4})^6 \cdot (0,5)^{20}$.

Άσκηση 17

Να βρείτε τα αποτελέσματα:

(α) $2^9 \cdot 5^6$, (β) $2^{10} \cdot 2,5^5$, (γ) $8^5 \cdot 2^{-11}$, (δ) $2^{11} \cdot 3^9 \cdot 6^{-8}$, (ε) $\frac{12^{13}}{2^{24} \cdot 3^{12}}$, (στ) $\frac{12^{10}}{18^5 \cdot 8^3}$.

Άσκηση 18

Αν $x \neq 0$, να εκτελέσετε τις πράξεις:

(α) $\frac{6x^5}{2x^3}$, (β) $\frac{x^3 \cdot x^7}{x^6}$, (γ) $\frac{x^{10} \cdot x^{-8}}{x^3 \cdot x^{-6}}$, (δ) $(x^3)^3 \cdot x^6$, (ε) $(x^{-5})^{-2} \cdot x^{-7}$, (στ) $\frac{(x^7)^3}{(x^4)^4}$.

Άσκηση 19

Αν $x, y \neq 0$, να εκτελέσετε τις πράξεις:

(α) $(xy)^4 \cdot x^2 \cdot y^3$, (β) $(x^2 y)^4 \cdot x^{-3} \cdot y$, (γ) $(x^{-2} y^3)^{-3} \cdot (x^{-1} \cdot y^2)^5$, (δ) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \cdot x^{-3} \cdot y^8$,

(ε) $\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^3$, (στ) $(x^5 : y^4)^{-2} : (x^{-5} \cdot y^{-4})^3$.

Άσκηση 20

Αν $x = -\frac{1}{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$(\alpha) A = \frac{(x^{-3})^{-2} (x^{-2})^4}{(x^3)^3 (x^8)^{-1}}, (\beta) B = \left[\frac{(x^5 : x^3)^4}{(x^{-9} : x^{-11})^3} \right]^{-2}.$$

Άσκηση 21

Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων, αν $x = 8$ και $y = 2$:

$$(\alpha) A = (x^4 y^{-1})^{-3} \cdot (x^3 y^{-2})^5 \cdot y^2, (\beta) B = \frac{(x^{-2} y)^{-4}}{(xy)^3 \cdot (xy)^{-1}}.$$

Άσκηση 22

Αν ισχύει: $xy = -2$, να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

$$(\alpha) A = \frac{(x^3 \cdot y^2)^4}{(x^4 \cdot y)^2 \cdot y^2}, (\beta) B = \frac{(x^{-2} \cdot y^{-3})^3}{x^{-3} : (y^2)^3}.$$

Άσκηση 23

Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = (-1)^{50} \cdot (-3)^2 - (-2)^3 - (-3)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ και $\beta = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3^{-1}\right]^{-1}$

(α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

$$(\beta) \text{ Να βρείτε την τιμή της παράστασης: } A = \left[\frac{\beta : \alpha^{-4}}{(\beta^{-1} \cdot \alpha^3)^3} \right]^2 : \left[\frac{\alpha^7 : \alpha^2}{(\beta^5)^2 \cdot \beta^{-7}} \right]^{-1}.$$

Άσκηση 24

Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = 2^4 \cdot 8^3 \cdot 16^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$ και $\beta = 0,5^4 \cdot 0,25^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{10}$

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β ως δυνάμεις με βάση το 2.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = (\alpha^{-3} \beta^4)^{-3} : (\alpha : \beta^5)^3$.

Άσκηση 25

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) (x+3)^2, (\beta) (\alpha+2\beta)^2, (\gamma) (x^2+3x)^2, (\delta) (x-5)^2, (\epsilon) (4x-3y)^2,$$

$$(\sigma\tau) \left(\frac{1}{2}x - 3x^2\right)^2, (\zeta) (x+1)^3, (\eta) (x^2+2y)^3, (\theta) (xy^2+3x^2y^3)^3.$$

Άσκηση 26

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) (x-2)^3, (\beta) (3\alpha-\beta^2)^3, (\gamma) \left(x-\frac{1}{x}\right)^3, (\delta) (x+2)(x-2), (\epsilon) (\omega-8)(8+\omega),$$

$$(\sigma\tau) \left(\frac{4y}{3}-5x\right)\left(\frac{4y}{3}+5x\right).$$

Άσκηση 27

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) (-\alpha-\beta)^2, (\beta) (-x+y)^2, (\gamma) (-\gamma-\delta)^3, (\delta) (-3+\alpha)^3, (\epsilon) (x+y+\omega)^2,$$

$$(\sigma\tau) (\kappa + \lambda - \mu)^2, (\zeta) (2\alpha - \beta + 1)^2, (\eta) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right)^2.$$

Άσκηση 28

Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha) (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2), (\beta) (x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x,$$

$$(\gamma) (x+1)^2 - (x-1)(x+1) = 2(x+1), (\delta) (\alpha-2)^2 + 2 = 2(\alpha-1)^2 - (\alpha-2)(\alpha+2),$$

$$(\epsilon) (2x-3)^2 - [2(x+1)]^2 = 5 - 20x, (\sigma\tau) (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = [(x-y)(x+y)]^2.$$

Άσκηση 29

Αν ισχύει: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta = 1$.

Άσκηση 30

Αν ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = 2$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha + 2\beta)^2 + (2\alpha - \beta)^2 = 10$.

Άσκηση 31

Αν ισχύει: $\alpha - \beta = 2$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 3\alpha^2 = \beta^3 + 3\beta^2 - 4$.

Άσκηση 32

Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει: $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}.$$

Άσκηση 33

Για τους πραγματικούς μη μηδενικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν: $\alpha + \beta + \gamma = 3$ και

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$,

(β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$.

Άσκηση 34

Αν ο αριθμός x^2 είναι άρρητος, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός x είναι άρρητος.

Άσκηση 35

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\alpha^2 - (\alpha - 2)(\alpha + 2) = 4$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = 3,12345^2 - 1,12345 \cdot 5,12345$.

Άσκηση 36

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - (\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) = (\gamma - \beta)(\gamma + \beta)$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = 2014 \cdot 2010 - 2013 \cdot 2011$.

Άσκηση 37

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^4 - \beta^4$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = 99 \cdot 101 \cdot 10.001$.

Άσκηση 38

(α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$(i) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$(ii) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$$

(β) Αν $x + \frac{2}{x} = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = x^2 + \frac{4}{x^2}$.

(γ) Αν $y - \frac{1}{y} = 4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $B = y^2 + \frac{1}{y^2}$.

Άσκηση 39

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

(β) Αν ισχύει $x - \frac{1}{x} = 2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = x^3 - \frac{1}{x^3}$.

Άσκηση 40

Αν ισχύει $x + y = \frac{7}{2}$ και $xy = -\frac{3}{2}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$(α) A = x^2 + y^2, (β) B = (x - y)^2, (γ) Γ = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}, (δ) Δ = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2.$$

Άσκηση 41

Αν ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$(α) A = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}, (β) B = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}, (γ) Γ = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}, (δ) Δ = \alpha^7 + \frac{1}{\alpha^7}.$$

Άσκηση 42

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) \alpha x - \beta y - \alpha y + \beta x, (β) 5x^3 - 8x^2 + 5x - 8, (γ) 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 3\beta\gamma, \\ (δ) \alpha x^3 + \alpha y^2 x - \beta x^3 - \beta y^2 x, (ε) x^2 - 9, (στ) 4\alpha^2 - 25\beta^2, (ζ) \alpha x^2 - \alpha y^2, (η) x^8 - y^4.$$

Άσκηση 43

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) x^3 + 8, (β) 27\alpha^3 - 1, (γ) x^3 + 8y^3, (δ) 24\alpha^3 - 3, (ε) x^2 + 2x + 1, (στ) y^2 + 12y + 36, \\ (ζ) -x^2 - 6x - 9, (η) 9\omega^2 - 12\omega + 4.$$

Άσκηση 44

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) 4\alpha^3 - \alpha(\beta - \gamma)^2, (β) \alpha^2 x + 2\beta^2 - 2\alpha^2 - \beta^2 x, (γ) x^2 - 6x + 9 - y^2, \\ (δ) \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma, (ε) 4\alpha^2 - 25\beta^2 - 4\alpha + 1, (στ) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 + 2\alpha\beta - 2\gamma\delta.$$

Άσκηση 45

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$$(α) 47 \cdot 35 + 47 \cdot 65, (β) 79 \cdot 132 - 79 \cdot 32, (γ) 3 \cdot 97^2 - 27, \\ (δ) 25^2 - 24^2 - 93^2, (ε) 79^2 + 2 \cdot 79 + 1.$$

Άσκηση 46

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) A = \frac{3\alpha^2 + 3\alpha\beta}{4\alpha\beta + 4\beta^2}, (β) B = \frac{2\beta^2 - 6\alpha\beta}{12\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3}, (γ) A = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha\gamma}, \\ (δ) B = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}.$$

Άσκηση 47

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε:

$$(\alpha) A = \frac{x^3 + 2x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}, (\beta) B = \frac{(x^2 - x) + 2x - 2}{x^2 - 1}, (\gamma) A = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{\alpha x - \alpha y} : \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{\alpha^2 x - \alpha^2 y},$$

$$(\delta) B = \frac{x^2 - 8x + 16}{\alpha x^2 + \alpha xy} : \frac{x^3 - 16x}{x^2 + 2xy + y^2}.$$

Άσκηση 48

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) x^3 = 4x, (\beta) 2x^3 - 50x = 0, (\gamma) 3x^3 + 5x = 21x - x^3, (\delta) x(2x+1)^2 = x(x+5)^2,$$

$$(\epsilon) 2x(3x-1)^2 - 8x^3 = 0, (\sigma\tau) x^3 + 2x^2 = x + 2.$$

Άσκηση 49

Αν ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) A = (\alpha\kappa - \beta\lambda)^3 + (\beta\kappa - \gamma\lambda)^3 + (\gamma\kappa - \alpha\lambda)^3,$$

$$(\beta) B = (\alpha^3 - \alpha\beta\gamma)^3 + (\beta^3 - \alpha\beta\gamma)^3 + (\gamma^3 - \alpha\beta\gamma)^3.$$

Άσκηση 50

$$(\alpha) \text{ Αν } \alpha \neq \beta, \text{ να αποδείξετε ότι: } \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} - \alpha\beta = (\alpha - \beta)^2,$$

$$(\beta) \text{ Να βρείτε την τιμή της παράστασης: } A = \frac{2014^3 + 2012^3}{4026} - 2012 \cdot 2014.$$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο - ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ - 2.1
ΘΕΜΑ 2^ο

Άσκηση 1

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$, ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

Άσκηση 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί, ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

Άσκηση 3

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.