

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

### 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

#### ΘΕΩΡΙΑ 1

(α) Ένας αριθμός  $\alpha$  είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό  $\beta$ , όταν η διαφορά  $\alpha - \beta$  είναι **θετικός** αριθμός. Δηλαδή:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ .

Αν για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:  $\alpha > \beta$  ή  $\alpha = \beta$ , τότε γράφουμε:  $\alpha \geq \beta$ .

(β) Ένας αριθμός  $\alpha$  είναι **μικρότερος** από έναν αριθμό  $\beta$ , όταν η διαφορά  $\alpha - \beta$  είναι **αρνητικός** αριθμός. Δηλαδή:  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$ .

Αν για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:  $\alpha < \beta$  ή  $\alpha = \beta$ , τότε γράφουμε:  $\alpha \leq \beta$ .

#### ΘΕΩΡΙΑ 2 (Κανόνες Προσθήμου - Ανισότητας)

Έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

(α) Αν  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$ .

(β) Αν  $\alpha < 0$  και  $\beta < 0 \Rightarrow \alpha + \beta < 0$ .

(γ) Αν οι  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι  $\Leftrightarrow \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$ .

(δ) Αν οι  $\alpha, \beta$  είναι ετερόσημοι  $\Leftrightarrow \alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$ .

(ε) Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\alpha^2 \geq 0$ , (στ) Αν  $\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ .

#### ΘΕΩΡΙΑ 3 (Ιδιότητες - Ανισοτήτων)

Έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Μεταβατική ιδιότητα: Αν  $\alpha > \beta$  και  $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$ .

(β) Πρόσθεση αριθμού στα δύο μέλη μιας ανισότητας:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$ .

(γ) Πολλαπλασιασμός αριθμού στα δύο μέλη μιας ανισότητας:

- Αν  $\gamma > 0$ , τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ .
- Αν  $\gamma < 0$ , τότε  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

(δ) Πρόσθεση κατά μέλη δύο ανισοτήτων: Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

(ε) Πολλαπλασιασμός κατά μέλη δύο ανισοτήτων:

Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  ισχύει η συνεπαγωγή:  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$

#### ΘΕΩΡΙΑ 4 (Σημαντική Παρατήρηση)

Δεν έχουμε το δικαίωμα να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες. Για παράδειγμα ισχύουν οι ανισότητες:

- $5 < 10$  και  $1 < 8$ . Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη έχουμε:  $5 - 1 < 10 - 8 \Leftrightarrow 4 < 2$ , που είναι λάθος.
- $6 < 10$  και  $2 < 5$ . Αν διαιρέσουμε κατά μέλη έχουμε:  $\frac{6}{2} < \frac{10}{5} \Leftrightarrow 3 < 2$ , που είναι λάθος.

#### ΘΕΩΡΙΑ 5 (Ανισότητες και Δυνάμεις)

(α) (i) Αν  $\alpha, \beta > 0$  τότε:  $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ .

(ii) Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $n$  περιττός, ισχύει:  $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ .

(iii) Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $n$  άρτιος, ισχύει:  $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$  ή  $\alpha = -\beta$ .

(β) (i) Αν  $\alpha, \beta > 0$  τότε:  $\alpha^n > \beta^n \Leftrightarrow \alpha > \beta$ .

(ii) Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και ν **περιπτώς**, ισχύει:  $\alpha' > \beta' \Leftrightarrow \alpha > \beta$ .

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

(α) Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι, να αποδείξετε ότι:  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ .

(β) Για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ .

(γ) (i) Αν  $\alpha > 0$ , τότε ισχύει ότι:  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ .

(ii) Αν  $\alpha < 0$ , τότε ισχύει ότι:  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq 2$ .

### ΛΥΣΗ

(α) Αφού οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι ισχύει ότι:  $\alpha\beta > 0$ .

Διαιρούμε κατά μέλη την αρχική ανισότητα με το  $\alpha\beta > 0$  και προκύπτει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

(β) Έχουμε:  $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ , που ισχύει.

(γ) (i) Αρχικά πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$  με

$\alpha > 0$ , οπότε δεν αλλάζει η φορά και έχουμε:  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \geq 2\alpha$

$\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$ , που ισχύει.

(ii) Αρχικά πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$  με  $\alpha < 0$ ,

οπότε αλλάζει η φορά και έχουμε:  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \leq -2\alpha$

$\alpha^2 + 1 \leq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 \geq 0$ , που ισχύει.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(α) Να αποδείξετε ότι:  $(x^2 + 1)(y^2 + 4) \geq (xy + 2)^2$ .

(β) Να αποδείξετε ότι:  $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$ , για  $\alpha \neq \beta$ .

### ΛΥΣΗ

(α) Κάνοντας πράξεις έχουμε:  $(x^2 + 1)(y^2 + 4) \geq (xy + 2)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 \geq x^2 y^2 + 4xy + 4 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 4xy \geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2 + y^2 - 2 \cdot 2x \cdot y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 \geq 0. \text{ Που ισχύει.}$$

(β) Κάνοντας πράξεις έχουμε:

$$\bullet \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0. \text{ Ισχύει.}$$

$$\bullet \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta - \beta^2)}{\alpha - \beta} \stackrel{\alpha - \beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \alpha^2 + \alpha\beta - \beta^2$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 0. \text{ Ισχύει.}$$

$$\text{Άρα αποδείξαμε ότι: } \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}.$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

(α) Αν ισχύει  $\alpha > \beta > 0$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha^7 - \frac{1}{\alpha} > \beta^7 - \frac{1}{\beta}$ .

(β) Αν ισχύει  $\alpha > \beta > 1$ , να αποδείξετε ότι:  $\beta(\alpha + 1) > \alpha + \beta^2$ .

#### ΛΥΣΗ

(α) Αφού  $\alpha, \beta > 0$ , άρα ισχύει ότι:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^7 > \beta^7$  (1).

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι, άρα ισχύει ότι:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} > -\frac{1}{\beta}$  (2).

Από (1)+(2) έχουμε:  $\alpha^7 - \frac{1}{\alpha} > \beta^7 - \frac{1}{\beta}$ .

(β) Κάνοντας πράξεις έχουμε:  $\beta(\alpha + 1) > \alpha + \beta^2 \Leftrightarrow \beta\alpha + \beta > \alpha + \beta^2$   
 $\Leftrightarrow \beta\alpha - \alpha + \beta - \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta - 1) - \beta(\beta - 1) > 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)(\alpha - \beta) > 0$ .

Χρησιμοποιώντας την αρχική σχέση:  $\alpha > \beta > 1$  έχουμε:

- $\beta > 1 \Leftrightarrow \beta - 1 > 0$ .
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

Άρα αποδείξαμε ότι ισχύει η αρχική.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

(α) Αν  $x \neq 1$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{x^3 - 2}{x - 1} > \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ .

(β) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$ .

#### ΛΥΣΗ

(α) Στην ανισότητα δεν μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών γιατί το  $x - 1$  δεν είναι πάντα θετικό ή αρνητικό. Κατά συνέπεια μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα.

$$\begin{aligned} \text{Για } x \neq 1, \text{ έχουμε: } \frac{x^3 - 2}{x - 1} > \frac{x^2 - 2x}{x - 1} &\Leftrightarrow \frac{x^3 - 2}{x - 1} - \frac{x^2 - 2x}{x - 1} > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} > 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2(x - 1) + 2(x - 1)}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} > 0 \end{aligned}$$

$$\stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow} x^2 + 2 > 0, \text{ που ισχύει.}$$

(β) Ισχύει  $x^2 + 1 > 0$ , οπότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της

$$\text{αρχικής ανισότητας. Έχουμε: } \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 + 1) \cdot \frac{x}{x^2 + 1} \leq 2(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

### ΘΕΩΡΙΑ 6 (Σύγκριση Αριθμών)

(α) Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , βρίσκουμε την διαφορά  $\alpha - \beta$  και έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν  $\alpha - \beta > 0$ , τότε  $\alpha > \beta$
- Αν  $\alpha - \beta < 0$ , τότε  $\alpha < \beta$
- Αν  $\alpha - \beta = 0$ , τότε  $\alpha = \beta$ .

(β) Για να συγκρίνουμε δύο **θετικών** αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , βρίσκουμε το πηλίκο  $\frac{\alpha}{\beta}$  και

έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν  $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ , τότε  $\alpha > \beta$
- Αν  $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ , τότε  $\alpha < \beta$
- Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ , τότε  $\alpha = \beta$ .

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5**

(α) Αν  $x \neq 3$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:  $\alpha = x^2 + 4$  και  $\beta = 6x - 5$ .

(β) Αν ισχύει:  $0 < \alpha < \beta$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:  $\frac{\alpha}{\beta}$ , 1, και  $\frac{\beta}{\alpha}$ .

(γ) Αν ισχύει:  $0 < \alpha < \beta$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:  $(\alpha\beta)^{10}$  και  $\beta^{20}$ .

### **ΛΥΣΗ**

(α) Δημιουργούμε την διαφορά:  $\alpha - \beta = (x^2 + 4) - (6x - 5) = x^2 + 4 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$ . Όμως  $x \neq 3 \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$ . Άρα  $\alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta$ .

(β) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας:  $\alpha < \beta$  με  $\beta > 0$  και έχουμε:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1 \quad (1)$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας:  $\alpha < \beta$  με  $\alpha > 0$  και έχουμε:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1 < \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε:  $\frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}$ .

(γ) Δημιουργούμε το πηλίκο τους και το συγκρίνουμε με την μονάδα. Έχουμε:

$$\frac{(\alpha\beta)^{10}}{\beta^{20}} = \frac{\alpha^{10} \cdot \beta^{10}}{\beta^{20}} = \frac{\alpha^{10}}{\beta^{10}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{10} < 1. \text{ Αποδείξαμε ότι: } \frac{(\alpha\beta)^{10}}{\beta^{20}} < 1 \Leftrightarrow (\alpha\beta)^{10} < \beta^{20}.$$

### **ΘΕΩΡΙΑ 7**

Ισχύει ότι:  $\alpha^2 \geq 0$ , για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , προκύπτουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  και  $\beta = 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$ .

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6**

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\alpha - 2\beta).$$

### **ΛΥΣΗ**

Για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\alpha - 2\beta) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 13 = 6\alpha - 4\beta \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 + \beta^2 + 4\beta + 4 = 0$$
$$(\alpha - 3)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 3 = 0 \text{ και } \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ και } \beta = -2.$$

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7**

Αν ισχύει:  $1 \leq \alpha \leq 3$  και  $-4 \leq \beta \leq -2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των επόμενων παραστάσεων:

(α)  $2\alpha + 3\beta$ , (β)  $\alpha - \beta$ , (γ)  $\alpha^2 + \beta^2$ , (δ)  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

### ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε:

- $1 \leq \alpha \leq 3 \xrightarrow{\cdot 2} 2 \leq 2\alpha \leq 6$  (1)
- $-4 \leq \beta \leq -2 \xrightarrow{\cdot 3} -12 \leq 3\beta \leq -6$  (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$2 + (-12) \leq 2\alpha + 3\beta \leq 6 + (-6) \Leftrightarrow -10 \leq 2\alpha + 3\beta \leq 0.$$

(β) Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισώσεις οπότε έχουμε:

- $1 \leq \alpha \leq 3$  (3)
- $-4 \leq \beta \leq -2 \xrightarrow{\cdot (-1)} 4 \geq -\beta \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq -\beta \leq 4$  (4)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε:

$$1 + 2 \leq \alpha + (-\beta) \leq 3 + 4 \Leftrightarrow 3 \leq \alpha - \beta \leq 7.$$

(γ) Δεν μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο τα μέλη μιας ανισότητας αν όλα τα μέλη της δεν είναι θετικά, οπότε έχουμε:

- $1 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 1^2 \leq \alpha^2 \leq 3^2 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha^2 \leq 9$  (5)
- $-4 \leq \beta \leq -2 \xrightarrow{\cdot (-1)} 4 \geq -\beta \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq -\beta \leq 4 \Leftrightarrow 2^2 \leq (-\beta)^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow 4 \leq \beta^2 \leq 16$  (6)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (5) και (6) έχουμε:

$$1 + 4 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 9 + 16 \Leftrightarrow 5 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 25.$$

(δ) Έχουμε:

- $1 \leq \alpha \leq 3$  (7)
- $-4 \leq \beta \leq -2 \xrightarrow{\cdot (-1)} 4 \geq -\beta \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{2}$  (8)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (7) και (8) έχουμε:

$$1 \cdot \frac{1}{4} \leq \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\beta}\right) \leq 3 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq -\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\cdot (-1)} -\frac{1}{4} \geq \frac{\alpha}{\beta} \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq -\frac{1}{4}.$$

### ΘΕΩΡΙΑ 8

| ΔΙΑΣΤΗΜΑ | ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ                  | ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ         |
|----------|----------------------------|---------------------|
|          | $\alpha \leq x \leq \beta$ | $[\alpha, \beta]$   |
|          | $\alpha \leq x < \beta$    | $[\alpha, \beta)$   |
|          | $\alpha < x \leq \beta$    | $(\alpha, \beta]$   |
|          | $\alpha < x < \beta$       | $(\alpha, \beta)$   |
|          | $x \geq \alpha$            | $[\alpha, +\infty)$ |
|          | $x > \alpha$               | $(\alpha, +\infty)$ |
|          | $x \leq \alpha$            | $(-\infty, \alpha]$ |
|          | $x < \alpha$               | $(-\infty, \alpha)$ |

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8**

Να γράψετε με μορφή διαστήματος τα σύνολα των αριθμών  $x$  για τους οποίους ισχύει:

- (α)  $1 \leq x \leq 5$ , (β)  $-2 < x < 4$ , (γ)  $-3 \leq x < 0$ , (δ)  $-7 < x \leq 13$ , (ε)  $x \geq 3$ , (στ)  $x \leq 1$ ,  
(ζ)  $x > -2$ , (η)  $x < -4$

### **ΛΥΣΗ**

- (α) Είναι  $1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$ .  
(β) Είναι  $-2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$ .  
(γ) Είναι  $-3 \leq x < 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0)$ .  
(δ) Είναι  $-7 < x \leq 13 \Leftrightarrow x \in (-7, 13]$ .  
(ε) Είναι  $x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty)$ .  
(στ) Είναι  $x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$ .  
(ζ) Είναι  $x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, +\infty)$ .  
(η) Είναι  $x < -4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4)$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1

(α) Αν  $\alpha > 2$ , να αποδείξετε ότι:  $3(\alpha - 3) > \alpha - 5$

(β) Αν  $\alpha < -3$ , να αποδείξετε ότι:  $6(\alpha + 1) < -3(1 - \alpha)$ .

### Άσκηση 2

(α) Αν ισχύει  $\alpha < 3 < \beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$

(β) Αν ισχύει  $\alpha < -2 < \beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha^2 - 2\beta > \alpha(\beta - 2)$

(γ) Αν ισχύει  $\alpha < \beta < -4$ , να αποδείξετε ότι:  $4\beta - \alpha(4 - \beta) < \alpha^2$

### Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

(α)  $\alpha(\alpha + 4\beta) \geq \beta(2\alpha - \beta)$ , (β)  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \geq \beta(4\alpha - 5\beta)$ ,

(γ)  $2(x-1)^2 \geq (x+1)^2 - 8$ , (δ)  $\frac{(x+2)^2}{6} \geq \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ , (ε)  $5(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$ ,

(στ)  $\beta^2 \geq \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8}$ .

### Άσκηση 4

(α) Αν  $x \geq -1$ , να αποδείξετε ότι:  $x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$

(β) Αν  $\alpha \geq \beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha^3 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \beta^3 \geq 0$

(γ) Αν  $x \leq -2$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{x^3}{2} - x^2 - 2x + 4 \leq 0$ .

### Άσκηση 5

Αν ισχύει  $\alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι: (α)  $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ , (β)  $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$ .

### Άσκηση 6

Αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ομόσημοι, με  $\alpha \leq \beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha - \frac{1}{\alpha} < \beta - \frac{1}{\beta}$ .

### Άσκηση 7

Αν  $\alpha, \beta > 0$ , να αποδείξετε ότι: (α)  $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$ , (β)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{\beta} \geq \frac{9}{\alpha + \beta}$ .

### Άσκηση 8

Αν ισχύει:  $0 < \alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} < \frac{\beta}{\alpha}$ .

### Άσκηση 9

Να αποδείξετε ότι:

(α)  $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ , (β)  $\alpha^2 - \alpha + 1 > 0$ , (γ)  $\alpha^4 - 7\alpha^2 + 16 > 0$ ,

(δ)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 2(\alpha\beta - \gamma\delta)$ , (ε)  $\alpha^2 + \beta^2 + 18 \geq 6(\alpha - \beta)$ .

### Άσκηση 10

Αν  $\alpha + \beta \geq 0$ , να αποδείξετε ότι: (α)  $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta)$ , (β)  $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$ .

### Άσκηση 11

(α) Αν  $x, y > 0$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ ,

(β) Αν  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{\alpha + \beta}{\gamma} + \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} \geq 6$ .

### **Άσκηση 12**

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$ , (β)  $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma + \alpha} \geq \alpha + \beta + \gamma$ .

### **Άσκηση 13**

Αν ισχύει:  $\alpha - 1 < 0$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(α)  $x = 7 - 4\alpha$  και  $y = 4 - \alpha$ , (β)  $x = \alpha^3 - 2$  και  $y = \alpha^2 - 2\alpha$ .

### **Άσκηση 14**

Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(α)  $x(x - 6)$  και  $2(x - 8)$ , (β)  $\alpha(4\alpha - 3\beta)$  και  $\beta(\alpha - \beta)$ .

### **Άσκηση 15**

Αν  $\alpha > 0$ , να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς:

(α)  $\alpha^2\beta - \alpha^3$  και  $\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$ , (β)  $(\alpha + 1)^3$  και  $1 + 3\alpha + 3\alpha^2$ .

### **Άσκηση 16**

Αν ισχύει:  $0 < \alpha < \beta$ , να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς:

(α)  $\frac{\alpha^5}{\beta^5}$  και 1, (β)  $\frac{1}{\alpha^9}$  και  $\frac{1}{\beta^9}$ , (γ)  $\alpha^{10}\beta^7$  και  $\beta^{10}\alpha^7$ .

### **Άσκηση 17**

Να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς:

(α)  $5^{20} \cdot 7^{12}$  και  $7^{20} \cdot 5^{12}$ , (β)  $6^6 \cdot 3^8$  και  $3^{20}$ .

### **Άσκηση 18**

Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει:

(α)  $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + 2 = 0$ , (β)  $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1)$ .

### **Άσκηση 19**

Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$  για τους οποίους ισχύει:

(α)  $2x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2xy$ , (β)  $2x^2 + 9y^2 = -9 - 6x(1 - y)$ .

### **Άσκηση 20**

(α) Να αποδείξετε ότι:  $\alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2(\alpha - 2\beta)$

(β) Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

### **Άσκηση 21**

Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει:

(α)  $\alpha^2 + \beta^2 + 20 \leq 4(2\beta - \alpha)$ , (β)  $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 \leq 4\alpha - 3(2\beta + 3)$ ,

(γ)  $2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \leq 2\alpha(3 - \beta)$ .

### **Άσκηση 22**

Αν ισχύει:  $1 < \alpha < 3$  και  $2 < \beta < 4$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

(α)  $2\alpha + 3\beta$ , (β)  $\alpha - \beta$ , (γ)  $3\alpha - 2\beta$ , (δ)  $-\alpha - 4\beta$ , (ε)  $3 - \alpha\beta$ , (στ)  $\frac{\alpha}{\beta} + 1$ .

### **Άσκηση 23**

Αν ισχύει:  $2 < \alpha < 5$  και  $2 < \beta < 4$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η



τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

(α)  $\alpha^2 + 2\beta$ , (β)  $\alpha\beta - 5$ , (γ)  $\frac{1}{\alpha} + \beta$ , (δ)  $\frac{1}{\beta} - 2\alpha$ , (ε)  $\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$ , (στ)  $1 - \frac{2}{\alpha\beta}$ .

#### **Άσκηση 24**

Αν ισχύει:  $1 < \alpha < 2$  και  $-3 < \beta < -2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

(α)  $4\alpha - 3\beta$ , (β)  $\alpha^2 + \beta^2$ , (γ)  $\alpha\beta - 2$ , (δ)  $3 - \frac{\alpha}{\beta}$ , (ε)  $\alpha^3 - 3\beta^2$ , (στ)  $\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$ .

#### **Άσκηση 25**

Αν ισχύει:  $-2 < \alpha < -1$  και  $-4 < \beta < -3$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

(α)  $4\alpha - 2\beta + 1$ , (β)  $2 - 3\alpha\beta$ , (γ)  $2\alpha^2 + \beta^2$ , (δ)  $\beta^2 - \alpha^3$ , (ε)  $(\alpha + 2)^2 - 2\beta$ , (στ)  $1 - \frac{\alpha}{\beta}$ .

#### **Άσκηση 26**

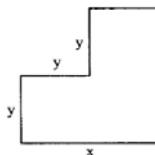
Αν ισχύει:  $-2 < \alpha < 4$  και  $1 < \beta < 5$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

(α)  $\frac{\alpha}{2} - 2\beta$ , (β)  $\alpha^2$ , (γ)  $\alpha\beta$ , (δ)  $\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha\beta$ .

#### **Άσκηση 27**

Αν ισχύει:  $5 < x < 8$  και  $1 < y < 2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

- (α) Η περίμετρος του διπλανού σχήματος,  
(β) Το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



#### **Άσκηση 28**

Να βρείτε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα των αριθμών  $x$  που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

(α)  $2 \leq x \leq 6$ , (β)  $1 < x \leq 5$ , (γ)  $-4 \leq x < 3$ , (δ)  $-8 < x < -2$ , (ε)  $x > 4$ ,  
(στ)  $x \leq -5$ , (ζ)  $x < 0$ , (η)  $x \geq -1$ .

#### **Άσκηση 29**

Αν  $x \in [1, 2]$  και  $y \in [3, 4]$ , να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί:

(α)  $\alpha = 2x + 3y$ , (β)  $\beta = 3x - 2y$ , (γ)  $\gamma = -4x - y$ , (δ)  $\delta = xy - 6$ .

#### **Άσκηση 30**

Με βασικό σύνολο το  $\mathbb{R}$  θεωρούμε τα σύνολα  $A = [2, +\infty)$  και  $B = (-\infty, 6)$ .

Να βρείτε τα σύνολα:

(α)  $A \cup B$ , (β)  $A \cap B$ , (γ)  $A'$ , (δ)  $B'$ , (ε)  $A' \cap B'$ , (στ)  $A \cup B'$ ,  
(ζ)  $A - B$ , (η)  $B - A$ .

#### **Άσκηση 31**

Με βρείτε τα σύνολα  $A \cup B$  και  $A \cap B$  σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις.

(α)  $A = [1, 4]$  και  $B = (3, 5)$ , (β)  $A = [2, 7]$  και  $B = [7, 10]$ ,  
(γ)  $A = [-1, 2]$  και  $B = (2, 3)$ , (δ)  $A = [-3, 1]$  και  $B = (-1, 1)$ .

#### **Άσκηση 32**

Για τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  ισχύει:  $(24 + 3x)^2 + (9y + 18)^2 = 0$ .

- (α) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$ .  
(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(x^{-2}y^{-13}\omega^{-2})^{-3}(y^2\omega^{-3}):x^{-1}}{(x^2y^3\omega^2)^3(x^{-3}y^{-2}\omega^3)}, \text{ όπου } \omega \neq 0.$$

### **Άσκηση 33**

(α) Να αποδείξετε ότι:  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 2\beta + 2 \geq 0$

(β) Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta \neq 0$  είναι ετερόσημοι, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{2-\alpha}{\beta} \text{ και } \frac{\beta+2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha\beta}.$$

### **Άσκηση 34**

Για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:  $\alpha\beta + 1 > \alpha + \beta > 2$

(α) Να αποδείξετε ότι:  $\alpha - 1 > 0$  και  $1 - \beta < 0$ .

(β) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}$ .

(γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:  $x = \beta^3 - 1$  και  $y = \beta^2 - \beta$ .

### **Άσκηση 35**

(α) Να αποδείξετε ότι:  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$ .

(β) Αν ισχύει:  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha + \beta = 1$ , να αποδείξετε ότι:

$$(i) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq 4, (ii) \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

### **Άσκηση 36**

Έστω  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2, (β) (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma,$$

$$(γ) \text{ αν επιπλέον ισχύει: } \alpha + \beta + \gamma = 1, \text{ τότε: } \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \geq 8.$$

### **Άσκηση 37**

(α) Να αποδειχθεί ότι:  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

(β) Ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις είναι  $x$  και  $y$ , έχει περίμετρο 20m.

(i) Να εκφραστεί το  $y$  με τη βοήθεια του  $x$ .

(ii) Να εκφραστεί το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου με τη βοήθεια του  $x$ , χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (α).

(iii) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν  $E$  είναι μικρότερο ή ίσο των  $25 \text{ m}^2$ .

**ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ**  
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> - ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ – 2.2**  
**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

**Άσκηση 1**

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

(β) Να βρείτε τους αριθμούς  $x, y$ , ώστε:  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ .

**Άσκηση 2**

Δίνονται οι παραστάσεις:  $K = 2\alpha^2 + \beta^2$  και  $\Lambda = 2\alpha\beta$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(α) Να αποδείξετε ότι:  $K \geq \Lambda$  για κάθε τιμή των  $\alpha, \beta$ .

(β) Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  ισχύει η ισότητα  $K = \Lambda$ ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

**Άσκηση 3**

Δίνονται οι παραστάσεις:  $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$  και  $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(α) Να αποδείξετε ότι:  $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

(α) Να αποδείξετε ότι:  $K \geq \Lambda$  για κάθε τιμή των  $\alpha, \beta$ .

(β) Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  ισχύει η ισότητα  $K = \Lambda$ ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

**Άσκηση 4**

Αν  $2 \leq x \leq 3$  και  $1 \leq y \leq 2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

(α)  $x + y$ , (β)  $2x - 3y$ , (γ)  $\frac{x}{y}$ .

**Άσκηση 5**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  ισχύουν  $3 \leq x \leq 5$  και  $-2 \leq y \leq -1$ , να βρείτε τα όρια των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

(α)  $y - x$ , (β)  $x^2 + y^2$ .

**Άσκηση 6**

Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύουν  $2 \leq \alpha \leq 4$  και  $-4 \leq \beta \leq -3$ .

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

(α)  $\alpha - 2\beta$ , (β)  $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ .

**Άσκηση 7**

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος  $x$  εκατοστά και πλάτος  $y$  εκατοστά αντίστοιχα. Αν για τα μήκη  $x$  και  $y$  ισχύει:  $4 \leq x \leq 7$  και  $2 \leq y \leq 3$ , τότε:

(α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου,

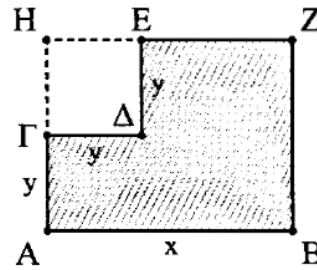
(β) Αν το  $x$  μειωθεί κατά 1 και το  $y$  τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

**Άσκηση 8**

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς  $y$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που

απέμεινε δίνεται από τη σχέση:  $\Pi = 2x + 4y$   
 (β) Αν ισχύει:  $5 < x < 8$  και  $1 < y < 2$ ,  
 να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται  
 η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω  
 γραμμοσκιασμένου σχήματος.



### Άσκηση 9

Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι:  $\alpha^3 < \alpha$ , (β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον  
 μεγαλύτερο τους αριθμούς:  $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$ .

### Άσκηση 10

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  με  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ , (β)  $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ .