

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Ορισμός Απόλυτης τιμής)

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από

$$\text{τον τύπο: } |\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Από τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε ότι:

- $|\alpha| = |- \alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) A = |x^2 + 2x + 1|, (\beta) B = |-x^2 - 2| - |x^2 - 4x + 4|, (\gamma) \text{ Αν ισχύει } \alpha < 2 < \beta,$$

$$\text{να απλοποιήσετε την παράσταση: } \Gamma = |\alpha - 2| + |2\beta - 4| - |\alpha - \beta| - |3\alpha - 2\beta - 4|.$$

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) \text{ Έχουμε ότι: } A = |x^2 + 2x + 1| = |(x+1)^2| = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

$$(\beta) \text{ Έχουμε ότι: } B = |-x^2 - 2| - |x^2 - 4x + 4| = |-(x^2 + 2)| - |(x-2)^2| = x^2 + 2 - (x-2)^2 = x^2 + 2 - (x^2 - 4x + 4) = x^2 + 2 - x^2 + 4x - 4 = 4x - 2.$$

(γ) Έχουμε ότι:

- $\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 < 0$
- $\beta > 2 \Leftrightarrow 2\beta > 4 \Leftrightarrow 2\beta - 4 > 0$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$
- $\left\{ \begin{array}{l} \alpha < 2 \Leftrightarrow 3\alpha < 6 \\ \beta > 2 \Leftrightarrow -2\beta < -4 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 3\alpha - 2\beta < 2 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta - 4 < -2.$

$$\begin{aligned} \text{Άρα το } 3\alpha - 2\beta - 4 < 0. \text{ Οπότε έχουμε: } \Gamma &= |\alpha - 2| + |2\beta - 4| - |\alpha - \beta| - |3\alpha - 2\beta - 4| \\ &= -(\alpha - 2) + (2\beta - 4) - [-(\alpha - \beta)] - [-(3\alpha - 2\beta - 4)] = -\alpha + 2 + 2\beta - 4 + \alpha - \beta + 3\alpha - 2\beta - 4 \\ &= 3\alpha - \beta - 6. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση:

$$(\alpha) A = 2 - |x - 2|, (\beta) B = 2x + |x + 3| - |2 - x|.$$

ΛΥΣΗ

(α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η Περίπτωση: Αν $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Τότε η παράσταση A γίνεται:

$$A = 2 - |x - 2| = 2 - (x - 2) = 2 - x + 2 = 4 - x.$$

2η Περίπτωση: Αν $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Τότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = 2 - |x - 2| = 2 - [-(x - 2)] = 2 + (x - 2) = x.$$

Τελικά η παράσταση Α γίνεται: $A = \begin{cases} 4 - x, & \text{αν } x \geq 2 \\ x, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$.

(β) Αρχικά βρίσκουμε για ποια x μηδενίζονται οι παραστάσεις μέσα στα απόλυτα:

- $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
- $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Δημιουργούμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
x+3	-	0	+	+
2-x	+	+	0	-

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: Αν $x < -3$ ή $x \in (-\infty, -3)$. τότε: $x + 3 < 0$ και $2 - x > 0$, οπότε έχουμε:

$$B = 2x + |x + 3| - |2 - x| = 2x - (x + 3) - (2 - x) = 2x - x - 3 - 2 + x = 2x - 5.$$

2η Περίπτωση: Αν $-3 \leq x \leq 2$ ή $x \in [-3, 2]$. τότε: $x + 3 \geq 0$ και $2 - x \geq 0$, οπότε έχουμε:

$$B = 2x + |x + 3| - |2 - x| = 2x + (x + 3) - (2 - x) = 2x + x + 3 - 2 + x = 4x + 1.$$

3η Περίπτωση: Αν $x > 2$ ή $x \in (2, +\infty)$. τότε: $x + 3 > 0$ και $2 - x < 0$, οπότε έχουμε:

$$B = 2x + |x + 3| - |2 - x| = 2x + (x + 3) - [-(2 - x)] = 2x + x + 3 + 2 - x = 2x + 5.$$

Τελικά η παράσταση Β γίνεται: $B = \begin{cases} 2x - 5, & \text{αν } x \in (-\infty, -3) \\ 4x + 1, & \text{αν } x \in [-3, 2] \\ 2x + 5, & \text{αν } x \in (2, +\infty) \end{cases}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $A = |\alpha - |\alpha|| - ||\alpha| + \alpha|$, (β) $B = |x - y| + |y - x| - |2y - 2x|$.

ΛΥΣΗ

(α) Από γνωστή ιδιότητα έχουμε: $|\alpha| \geq \alpha \Leftrightarrow \alpha - |\alpha| \leq 0$, επίσης έχουμε ότι:

$$|\alpha| \geq -\alpha \Leftrightarrow \alpha + |\alpha| \geq 0. \text{ Επομένως η παράσταση Α γίνεται: } A = |\alpha - |\alpha|| - ||\alpha| + \alpha| \\ = -(\alpha - |\alpha|) - (\alpha + |\alpha|) = -\alpha + |\alpha| - \alpha - |\alpha| = -2\alpha.$$

$$(β) \text{ Έχουμε ότι: } B = |x - y| + |y - x| - |2y - 2x| = |x - y| + |-(x - y)| - |2(x - y)| \\ = |x - y| + |x - y| - |2| \cdot |x - y| = |x - y| + |x - y| - 2|x - y| = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{|\alpha|^3 + 3\alpha^2}{2|\alpha| + 6}$.

ΛΥΣΗ

Η παράσταση Α ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι είναι $2|\alpha| + 6 \neq 0$.

$$\text{Από την ιδιότητα } |\alpha|^2 = \alpha^2, \text{ έχουμε: } A = \frac{|\alpha|^3 + 3\alpha^2}{2|\alpha| + 6} = \frac{|\alpha|^2 (|\alpha| + 3)}{2(|\alpha| + 3)} = \frac{|\alpha|^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Αν ισχύουν: $|2x - y| + |2x - 6| = |3 - x|$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y .

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $|2x - y| + |2x - 6| = |3 - x| \Leftrightarrow |2x - y| + |2(x - 3)| = |-(x - 3)|$.

$$\Leftrightarrow |2x - y| + 2|x - 3| = |x - 3| \Leftrightarrow |2x - y| + 2|x - 3| - |x - 3| = 0 \Leftrightarrow |2x - y| + |x - 3| = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y = 0 \text{ και } x - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x \text{ και } x = 3 \Leftrightarrow y = 6 \text{ και } x = 3.$$

ΘΕΩΡΙΑ 2

- Αν $\theta > 0$, τότε ισχύει ότι: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$.
- Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

(α) Αν ισχύει ότι: $|2\alpha - 2\beta + 5| = 5$, να αποδείξετε ότι: $\alpha = \beta$ ή $\beta - \alpha = 5$.

(β) Αν ισχύει ότι: $|\alpha + \beta| = |2\alpha - 7\beta|$, να αποδείξετε ότι: $\alpha = 8\beta$ ή $\alpha = 2\beta$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε: $|2\alpha - 2\beta + 5| = 5 \Leftrightarrow 2\alpha - 2\beta + 5 = 5 \text{ ή } 2\alpha - 2\beta + 5 = -5$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 2\beta \text{ ή } -2(\beta - \alpha) = -10 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \beta - \alpha = 5.$$

(β) Έχουμε: $|\alpha + \beta| = |2\alpha - 7\beta| \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\alpha - 7\beta \text{ ή } \alpha + \beta = -(2\alpha - 7\beta)$

$$\Leftrightarrow \alpha = 8\beta \text{ ή } 3\alpha = 6\beta \Leftrightarrow \alpha = 8\beta \text{ ή } \alpha = 2\beta.$$

ΘΕΩΡΙΑ 3

Έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες για την απόλυτη τιμή του γινομένου και του πηλίκου δύο αριθμών.

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ή γενικότερα $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$ και $|\alpha^n| = |\alpha|^n$.
- $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $A = |x| \cdot |x^3 + 2x^2 + x|$, (β) $B = \frac{|x^5 + x^3|}{|x^3 + x|}$ για $x \neq 0$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε:

$$A = |x| \cdot |x^3 + 2x^2 + x| = |x \cdot (x^3 + 2x^2 + x)| = |x^2 \cdot (x^2 + 2x + 1)| = |x^2| \cdot |x^2 + 2x + 1| \\ = |x^2| \cdot |(x + 1)^2| = x^2(x + 1)^2.$$

$$(β) \text{ Για } x \neq 0 \text{ έχουμε: } B = \frac{|x^5 + x^3|}{|x^3 + x|} = \frac{|x^5 + x^3|}{|x^3 + x|} = \frac{|x^3(x^2 + 1)|}{|x(x^2 + 1)|} = |x^2| = x^2.$$

ΘΕΩΡΙΑ 4

Για την απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών ισχύει ότι:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

- Η ισότητα $|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, ισχύει όταν οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**.

- Η ισότητα $\left| |\alpha| - |\beta| \right| \leq |\alpha \pm \beta|$, ισχύει όταν οι αριθμοί α και β είναι **ετερόσημοι**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να αποδειχθεί ότι: $|x+y| \leq |x+2| + |y-2|$.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι: $|x+y| \leq |(x+2) + (y-2)|$.

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, για $\alpha = x+2$ και $\beta = y-2$.

Έχουμε: $|(x+2) + (y-2)| \leq |x+2| + |y-2| \Leftrightarrow |x+y| \leq |x+2| + |y-2|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\left| \frac{4\alpha}{4\alpha^2 + 1} \right| \leq 1$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $|\alpha\beta| - \alpha\beta \geq \alpha|\beta| - \beta|\alpha|$.

(γ) Αν ισχύει ότι: $|\alpha - 2\beta| < |2\alpha - \beta|$, να αποδείξετε ότι: $|\beta| < |\alpha|$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε: $\left| \frac{4\alpha}{4\alpha^2 + 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|4\alpha|}{|4\alpha^2 + 1|} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|4\alpha|}{4\alpha^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow |4\alpha| \leq 4\alpha^2 + 1$

$\Leftrightarrow 4|\alpha| \leq 4|\alpha|^2 + 1 \Leftrightarrow 4|\alpha|^2 - 4|\alpha| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2|\alpha| - 1)^2 \geq 0$, διότι $4\alpha^2 + 1 > 0$.

(β) Έχουμε:

$|\alpha\beta| - \alpha\beta \geq \alpha|\beta| - \beta|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha| \cdot |\beta| - \alpha\beta - \alpha|\beta| + \beta|\alpha| \geq 0 \Leftrightarrow |\beta|(|\alpha| - \alpha) + \beta(|\alpha| - \alpha) \geq 0$

$\Leftrightarrow (|\alpha| - \alpha)(|\beta| + \beta) \geq 0$, που ισχύει.

(γ) Ισχύει ότι: $|\alpha - 2\beta| \geq 0$ και $|2\alpha - \beta| \geq 0$, οπότε μπορούμε να υψώνουμε και τα

δύο μέλη στο τετράγωνο. Άρα έχουμε: $|\alpha - 2\beta| < |2\alpha - \beta| \Leftrightarrow |\alpha - 2\beta|^2 < |2\alpha - \beta|^2$

$\Leftrightarrow (\alpha - 2\beta)^2 < (2\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 < 4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 3\beta^2 < 3\alpha^2$

$\Leftrightarrow \beta^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow |\beta|^2 < |\alpha|^2 \Leftrightarrow |\beta| < |\alpha|$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 (Απόσταση δύο αριθμών)

Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως. Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β , συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και ισχύει ότι: $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

- Ισχύει ότι: $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$.
- Ισχύει ότι: $d(\alpha, \beta) \geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Αν ισχύει ότι: $d(\alpha, 2\beta) - d(2\alpha, \beta) = d(5, 8) - d(2, -1)$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$d(\alpha, 2\beta) - d(2\alpha, \beta) = d(5, 8) - d(2, -1) \Leftrightarrow |\alpha - 2\beta| - |2\alpha - \beta| = |5 - 8| - |2 - (-1)|$

$\Leftrightarrow |\alpha - 2\beta| - |2\alpha - \beta| = |-3| - |3| \Leftrightarrow |\alpha - 2\beta| - |2\alpha - \beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha - 2\beta| = |2\alpha - \beta|$

$\Leftrightarrow \alpha - 2\beta = 2\alpha - \beta$ ή $\alpha - 2\beta = -2\alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ ή $\alpha = \beta$.

Δηλαδή οι αριθμοί α και β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

ΘΕΩΡΙΑ 6

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:
 $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$
- Για $x_0 = 0$, τότε: $|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$
- Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:
 $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$
- Για $x_0 = 0$, τότε: $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να βρείτε σε ποιο σύνολο ανήκουν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει:

(α) $|x| < 5$, (β) $|x| > 6$, (γ) $|x - 3| < 2$, (δ) $|x + 2| < 4$, (ε) $|x - 1| > 3$, (στ) $|x + 5| > 1$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε: $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (-5, 5)$.

(β) Έχουμε: $|x| > 6 \Leftrightarrow x > 6 \text{ ή } x < -6 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$.

(γ) Έχουμε: $|x - 3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$.

(δ) Έχουμε: $|x + 2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x + 2 < 4 \Leftrightarrow -6 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-6, 2)$.

(ε) Έχουμε: $|x - 1| > 3 \Leftrightarrow x - 1 > 3 \text{ ή } x - 1 < -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

(στ) Έχουμε: $|x + 5| > 1 \Leftrightarrow x + 5 > 1 \text{ ή } x + 5 < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-4, +\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$, να αποδείξετε ότι:

(α) $|7x - 2y| \leq 11$, (β) $|1 - 3x + 4y| \leq 12$.

ΛΥΣΗ

(α) Ισχύει ότι: $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \xrightarrow{\cdot 7} -7 < 7x < 7$ (1) και

$|y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2 \xrightarrow{\cdot (-2)} -4 \leq -2y \leq 4$ (2)

Από (1) + (2) έχουμε: $-11 < 7x - 2y < 11 \Leftrightarrow |7x - 2y| \leq 11$.

(β) Έχουμε:

$|1 - 3x + 4y| = |1 + (-3x) + 4y| \leq |1| + |-3x| + |4y| = 1 + 3|x| + 4|y| \leq 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 12$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε τις παρακάτω απόλυτες τιμές:

$$(\alpha) | +3 |, (\beta) | -7 |, (\gamma) | 0 |, (\delta) | \sqrt{2} - 1 |, (\epsilon) | \sqrt{2} - 2 |,$$

$$(\sigma\tau) | 4 - \sqrt{15} |, (\zeta) | 3 - \pi |, (\eta) | \pi - 4 |.$$

Άσκηση 2

Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$(\alpha) A = |-2| + |5| - |-3|, (\beta) B = \frac{|-3| \cdot (|-5| - |1|)}{-|-1| - |-3|},$$

$$(\gamma) \Gamma = |\sqrt{5} - 2| + |\sqrt{5} - 3|, (\delta) \Delta = |\pi - 4| - |\pi - 3| - |2\pi - 7|.$$

Άσκηση 3

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) A = |x^2 - 4x + 4|, (\beta) B = |x^2 + 16 - 8x|, (\gamma) \Gamma = |2x - x^2 - 1|,$$

$$(\delta) \Delta = |x^2 + 1| - |-x^2 - 4|, (\epsilon) E = |x^2 + 4x + 4| - |6x - x^2 - 9|.$$

Άσκηση 4

Αν $x < 3$, να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) A = |x - 3|, (\beta) B = 5 - |x - 3|, (\gamma) \Gamma = x - |2x - 6|.$$

Άσκηση 5

Αν $\alpha < 3 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) A = |3 - \alpha| + |3 - \beta| - |\alpha - \beta|, (\beta) B = |\alpha - 3| + |\beta| + |\alpha - \beta|,$$

$$(\gamma) \Gamma = |\alpha - 4| - |\beta - 2|, \Delta = |\alpha - \beta| - |5 - \alpha| - |1 - \beta|.$$

Άσκηση 6

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) A = \frac{x^2 + 2|x|}{|x| + 2}, (\beta) B = \frac{|x|^3 + 3x^2}{2|x| + 6}, (\gamma) \Gamma = \frac{x^2 + 4|x| + 4}{|x| + 2}, (\delta) \Delta = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}.$$

Άσκηση 7

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

$$(\alpha) A = |x - 3|, (\beta) B = 2x - |x - 1|, (\gamma) \Gamma = x - |4 - x|, (\delta) \Delta = x + 1 - |2x - 6|,$$

$$(\epsilon) E = |x + 1| + |x - 3|, (\sigma\tau) \Sigma\tau = 2x - |1 - x| + |x|, (\zeta) Z = |2 - x| + |3x - 3| - 2x.$$

Άσκηση 8

Αν ισχύει $-2 < x < 3$, να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) A = |5 - |x - 3||, (\beta) B = ||x + 2| - 5 - |2x - 6||.$$

Άσκηση 9

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) A = |3x - 6| - |4 - 2x| - |2 - x|, (\beta) B = |\alpha - \beta + 3| - |\beta - \alpha - 3| - |2\beta - 2\alpha - 6|.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x + 2| + |3 - x| - 2|x|$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x .

Άσκηση 11

Να γράψετε την παράσταση:

$$A = |x - |x|| + |x + |x||, \text{ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.}$$

Άσκηση 12

Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha) |x| = 3, (\beta) |x| = 7, (\gamma) |x| = 0, (\delta) |x| = -2.$$

Άσκηση 13

Αν ισχύει: $|a - b + 3| = 3$, να αποδείξετε ότι: $a = b$ ή $a = b - 6$.

Άσκηση 14

Αν ισχύει: $|3a - b| = |2a - 9b|$, να αποδείξετε ότι: $a = 2b$ ή $a = -8b$.

Άσκηση 15

Αν ισχύει: $|4a - 5b| - |2a - b| = 0$, να αποδείξετε ότι: $a = b$ ή $a = 2b$.

Άσκηση 16

Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) |a + 1|^2 - 4a = |a - 1|^2, (\beta) |a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2),$$

$$(\gamma) a^2 - (|a| - |b|)(|a| + |b|) = b^2, (\delta) (|a| - |b|)(|a| + |b|) + 2b(a + b) = |a + b|^2.$$

Άσκηση 17

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$(\alpha) \frac{|x^3 + 2x|}{|x|^2 + 2} = |x|, (\beta) \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 1, (\gamma) \frac{4x^2 + 9}{12} \geq |x|.$$

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι: $(\alpha) a^2 + b^2 \geq 2|ab|, (\beta) x^2 + 4 \geq 4|x|$.

Άσκηση 19

Αν ισχύει: $|2a + b| = |2a| + |b|$, όπου $a, b \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και b είναι ομόσημοι.

Άσκηση 20

Να αποδείξετε ότι: $(\alpha) ab + |ab| \geq |a|b + a|b|, (\beta) |x|^3 + 1 \geq x^2 + |x|$.

Άσκηση 21

Αν $a, b \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha) \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2, (\beta) \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2$.

Άσκηση 22

Αν $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 3$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) |x + y| \leq 5, (\beta) |3x + y| \leq 9, (\gamma) |x - 2y + 3| \leq 11, (\delta) \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 5 \right| \leq 7.$$

Άσκηση 23

(α) Αν ισχύει: $|a + 3| = |a| + 3$, να αποδείξετε ότι: $a \geq 0$,

(β) Αν ισχύει: $|a + 2| = ||a| - 2|$, να αποδείξετε ότι: $a \leq 0$.

Άσκηση 24

Έστω $\alpha, \beta \neq 0$ για τους οποίους ισχύει ότι: $|\alpha + \beta| < |\alpha - \beta|$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι, (β) Ισχύει: $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$.

Άσκηση 25

Έστω α, β πραγματικοί μη μηδενικοί αριθμοί.

(α) Αν ισχύει: $\frac{|\beta|}{\alpha} - \frac{\beta}{|\beta|} = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.

(β) Αν ισχύει: $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

Άσκηση 26

Να αποδείξετε ότι: (α) Αν $|3\alpha + 4\beta| < |4\alpha + 3\beta|$, τότε $|\alpha| > |\beta|$.

(β) Αν $\frac{|\alpha + 2\beta|}{|2\alpha + \beta|} \leq 1$, τότε $|\alpha| \geq |\beta|$.

Άσκηση 27

Να αποδείξετε ότι:

(α) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma + \beta|$, (β) $|\alpha - \beta| \leq |2\alpha + 5\beta| + |3\alpha - 7\beta| + |\beta - 4\alpha|$.

Άσκηση 28

(α) Αν $\alpha \neq 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ και 1,

(β) Αν $x, y \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} \leq 2$.

Άσκηση 29

Αν για τον πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -3$ ισχύει: $-1 \leq \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 3} \leq 1$,

να αποδείξετε ότι: $|\alpha| \leq 1$.

Άσκηση 30

Το διάστημα $[-9, \beta]$ έχει ακτίνα 7. Να βρείτε:

(α) τον αριθμό β , (β) το κέντρο του διαστήματος.

Άσκηση 31

Το διάστημα $[\alpha, 8]$ έχει κέντρο 3. Να βρείτε:

(α) τον αριθμό α , (β) την ακτίνα του διαστήματος.

Άσκηση 32

Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta).$$

Άσκηση 33

Να αποδείξετε ότι: $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, 3) + d(3, \beta)$.

Άσκηση 34

Δίνετε η παράσταση: $A = 2x - d(x, 1)$. Να γράψετε την παράσταση A:

(α) Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής,

(β) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Άσκηση 35

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Διάστημα ή Ένωση Διαστημάτων
$ x < 3$	
$ x \leq 4$	
$ x > 2$	
$ x \geq 5$	
	$x \in [-1, 1]$
	$x \in (-6, 6)$
	$x \in (-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$
	$x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$

Άσκηση 36

(α) $|x - 4| < 6$, (β) $|x + 3| < 7$, (γ) $|x - 2| > 4$, (δ) $|x + 1| > 2$, (ε) $|x - 5| \leq 3$, (στ) $|x - 6| \geq 5$

Άσκηση 37

Αν ισχύει ότι: $|x| < 2$ και $|y| < 4$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι παραστάσεις:

(α) $\alpha = 2x + 3y$, (β) $\beta = x - 2y + 4$, (γ) $\gamma = 3x - y - 2$, (δ) $\delta = -4x - 5y + 3$.

Άσκηση 38

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 3| - |x + 1| + |y - 1| - |y + 2|$,

όπου: $-1 \leq x \leq 3$ και $-2 \leq y \leq 1$

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α,

(β) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α.

Άσκηση 39

Δίνεται η παράσταση: $A = 2 - \frac{|1 - x|}{x^2 - 2x + 1}$,

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α,

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να τη γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Άσκηση 40

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:

$$|\beta - 3\alpha| + |3\alpha - 3| = |2 - 2\alpha|,$$

(α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β ,

(β) Να βρείτε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει:

(i) $d(x, \alpha) < \beta$,

(ii) $d(x, \beta) > \alpha$.