

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

3.1 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Επίλυση παραμετρικής Εξίσωσης)

Όταν οι συντελεστές α, β της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$, δεν είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά είναι γράμματα, τότε αυτά τα ονομάζουμε παραμέτρους. Άρα η εξίσωση ονομάζεται **παραμετρική**. Η επίλυση της εξίσωσης: $\alpha x + \beta = 0$ για τις διάφορες τιμές των α, β πραγματοποιείται με την διαδικασία της **διερεύνησης**.

1^η Περίπτωση:

Αν $\alpha \neq 0$, τότε έχουμε: $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Δηλαδή η εξίσωση έχει **μοναδική λύση**.

2^η Περίπτωση:

Αν $\alpha = 0$, τότε έχουμε: $0x + \beta = 0 \Leftrightarrow 0x = -\beta$.

Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις:

- (i) Αν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι **αδύνατη**,
- (ii) Αν $\beta = 0$, τότε η εξίσωση έχει τη μορφή: $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , είναι δηλαδή **ταυτότητα** ή **αόριστη**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να λύσετε την εξίσωση: $\lambda^2(x-1) = 4(x-\lambda+1)$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $\lambda^2(x-1) = 4(x-\lambda+1) \Leftrightarrow \lambda^2 x - \lambda^2 = 4x - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 x - 4x = \lambda^2 - 4\lambda + 4$
 $\Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)x = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)x = (\lambda - 2)^2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η Περίπτωση:

Αν $(\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{(\lambda - 2)^2}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}.$$

2^η Περίπτωση:

Αν $\lambda = 2$, τότε η εξίσωση γίνεται: $0x = 0$, άρα η εξίσωση είναι ταυτότητα.

3^η Περίπτωση:

Αν $\lambda = -2$, τότε η εξίσωση γίνεται: $0x = 16$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $3(x+3) - \lambda^2(1-x) = -3x(\lambda-1)$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η παραπάνω εξίσωση είναι: (α) ταυτότητα, (β) αδύνατη.

ΛΥΣΗ

(α) Για να είναι ταυτότητα η εξίσωση πρέπει να ισχύει: $\alpha = \beta = 0$, άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} 3(x+3) - \lambda^2(1-x) &= -3x(\lambda-1) \Leftrightarrow 3x+9 - \lambda^2 + \lambda^2 x = -3\lambda x - 3x \\ \Leftrightarrow 3x + \lambda^2 x + 3\lambda x - 3x &= \lambda^2 - 9 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 3\lambda)x = \lambda^2 - 9 \\ \Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)x &= (\lambda-3)(\lambda+3). \end{aligned}$$

Πρέπει $\lambda(\lambda+3)=0$ και $(\lambda-3)(\lambda+3)=0 \Leftrightarrow$

$(\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3)$ και $(\lambda=3 \text{ ή } \lambda=-3)$. Άρα τελικά $\lambda=-3$.

(β) Για να είναι αδύνατη η εξίσωση πρέπει να ισχύει: $\alpha=0$ και $\beta \neq 0$, άρα έχουμε:

$\lambda(\lambda+3)=0$ και $(\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3)$ και $(\lambda \neq 3 \text{ ή } \lambda \neq -3)$. Άρα τελικά $\lambda=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(x+3)-2(x+\mu)-4=0$ (1),

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ και μ , η εξίσωση (1) είναι:

(i) ταυτότητα, (ii) αδύνατη,

(β) Αν $\mu=1$ και η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση, τότε να τη βρείτε.

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $\lambda(x+3)-2(x+\mu)-4=0 \Leftrightarrow \lambda x+3\lambda-2x-2\mu-4=0$

$\Leftrightarrow \lambda x-2x=2\mu-3\lambda+4 \Leftrightarrow (\lambda-2)x=2\mu-3\lambda+4$.

(α) (i) Για να είναι ταυτότητα η εξίσωση πρέπει να ισχύει: $\alpha=\beta=0$, άρα έχουμε:

$\lambda-2=0$ και $2\mu-3\cdot 2+4=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ και $\mu=1$.

(ii) Για να είναι αδύνατη η εξίσωση πρέπει να ισχύει: $\alpha=0$ και $\beta \neq 0$, άρα έχουμε:

$\lambda-2=0$ και $2\mu-3\cdot 2+4 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda=2$ και $\mu \neq 1$.

(β) Για να έχει μοναδική λύση πρέπει: $\lambda-2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$. Άρα έχουμε:

$(\lambda-2)x=2\mu-3\lambda+4 \Leftrightarrow x=\frac{2\mu-3\lambda+4}{\lambda-2}$.

Για $\mu=1$, έχουμε: $x=\frac{2\cdot 1-3\lambda+4}{\lambda-2} \Leftrightarrow x=\frac{-3\lambda+6}{\lambda-2} \Leftrightarrow x=\frac{-3(\lambda-2)}{\lambda-2} \Leftrightarrow x=-3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^3=10-2(x-1)^2$, (β) $\frac{x}{x^2-9}+\frac{2}{3x-x^2}=\frac{2}{x^2+3x}$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε: $x^3=10-2(x-1)^2 \Leftrightarrow x^3=10-2(x^2-2x+1) \Leftrightarrow x^3=10-2x^2+4x-2$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2-4x-8=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)-4(x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \text{ ή } x-2=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=2$.

(β) $\frac{x}{x^2-9}+\frac{2}{3x-x^2}=\frac{2}{x^2+3x} \Leftrightarrow \frac{x}{(x-3)(x+3)}-\frac{2}{x(x-3)}=\frac{2}{x(x+3)}$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι: $x(x-3)(x+3) \neq 0$.

Πρέπει $x(x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 3$ και $x \neq -3$.

Άρα έχουμε:

$x(x-3)(x+3)\frac{x}{(x-3)(x+3)}-x(x-3)(x+3)\frac{2}{x(x-3)}=x(x-3)(x+3)\frac{2}{x(x+3)}$

$\Leftrightarrow x^2-2(x+3)=2(x-3) \Leftrightarrow x^2-2x-6=2x-6 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x-4=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=4$.

Η λύση $x=0$ απορρίπτεται από τους περιορισμούς, ενώ η λύση $x=4$ είναι δεκτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) |x^2 + 1| - |4x - x^2 - 4| - 5 = 0, (β) |2x - 1| = 5, (γ) \frac{3|x-2|-1}{2} = 4, (δ) |x+3| + 2 = 0.$$

ΛΥΣΗ

$$(α) \text{ Έχουμε: } |x^2 + 1| - |(x^2 - 4x + 4)| - 5 = 0 \Leftrightarrow |x^2 + 1| - |(x-2)^2| - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - (x-2)^2 - 5 = 0, \text{ αφού } x^2 + 1 > 0 \text{ και } (x-2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - x^2 + 4x - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$(β) |2x - 1| = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \text{ ή } 2x - 1 = -5 \Leftrightarrow 2x = 6 \text{ ή } 2x = -4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -2.$$

$$(γ) \frac{3|x-2|-1}{2} = 4 \Leftrightarrow 3|x-2|-1 = 8 \Leftrightarrow 3|x-2| = 9 \Leftrightarrow |x-2| = 3 \Leftrightarrow x-2 = 3 \text{ ή }$$

$$x-2 = -3 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = -1.$$

$$(δ) |x+3| + 2 = 0 \Leftrightarrow |x+3| = -2. \text{ Η εξίσωση είναι αδύνατη, διότι: } |x+3| \geq 0 \text{ και } -2 < 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) 2|3-x| - |2x+5| = 0, (β) |x-4| = 5-2x.$$

ΛΥΣΗ

$$(α) \text{ Έχουμε: } 2|3-x| - |2x+5| = 0 \Leftrightarrow 2|3-x| = |2x+5| \Leftrightarrow |6-2x| = |2x+5|$$

$$\Leftrightarrow 6-2x = 2x+5 \text{ ή } 6-2x = -(2x+5) \Leftrightarrow 4x = 1 \text{ ή } 6-2x = -2x-5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ή } 0x = -11, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

(β) Για την λύση της $|x-4| = 5-2x$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$(i) \text{ Αν } x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4, \text{ τότε έχουμε: } x-4 = 5-2x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

Η οποία απορρίπτεται, αφού πρέπει το $x \geq 4$.

$$(ii) \text{ Αν } x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4, \text{ τότε έχουμε: } -x+4 = 5-2x \Leftrightarrow x = 1.$$

Η οποία είναι δεκτή, αφού το $x < 4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x+3| - |2-x| = x+5.$$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1^ο Αρχικά βρίσκουμε που μηδενίζονται οι παραστάσεις μέσα στα απόλυτα,

Βήμα 2^ο Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων,

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
x+3	-	0	+	+
2-x	+	+	0	-

Βήμα 3^ο Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(i) \text{ Αν } x \in (-\infty, -3), \text{ τότε ισχύει: } x+3 < 0 \text{ και } 2-x > 0, \text{ οπότε η εξίσωση γίνεται:}$$

$$|x+3| - |2-x| = x+5 \Leftrightarrow -x-3-2+x = x+5 \Leftrightarrow x = -10. \text{ Η οποία είναι δεκτή αφού}$$

ικανοποιεί τον περιορισμό: $x < -3$.

(ii) Αν $x \in [-3, 2]$, τότε ισχύει: $x+3 > 0$ και $2-x > 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:
 $|x+3| - |2-x| = x+5 \Leftrightarrow x+3-2+x = x+5 \Leftrightarrow x = 4$. Η οποία απορρίπτεται αφού
 δεν ικανοποιεί τον περιορισμό: $-3 \leq x \leq 2$.
 (iii) Αν $x \in (2, +\infty)$, τότε ισχύει: $x+3 > 0$ και $2-x < 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:
 $|x+3| - |2-x| = x+5 \Leftrightarrow x+3+2-x = x+5 \Leftrightarrow x = 0$. Η οποία απορρίπτεται αφού
 δεν ικανοποιεί τον περιορισμό: $x > 2$.
 Τελικά η λύση της εξίσωσης είναι η $x = -10$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $|2x-5| = 5-2x$, (β) $|x^2-9| + |x^2+3x| = 0$, (γ) $2x - d(x, -2) = 3$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε: $|2x-5| = 5-2x \Leftrightarrow |2x-5| = -(2x-5) \Leftrightarrow 2x-5 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$.

(β) Έχουμε: $|x^2-9| + |x^2+3x| = 0 \Leftrightarrow x^2-9=0$ και $x^2+3x=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0$
 και $x(x+3)=0 \Leftrightarrow (x-3=0 \text{ ή } x+3=0)$ και $(x=0 \text{ ή } x+3=0) \Leftrightarrow (x=3 \text{ ή } x=-3)$
 και $(x=0 \text{ ή } x=-3)$. Άρα τελικά η κοινή λύση της εξίσωσης είναι: $x = -3$.

(γ) Η εξίσωση γίνεται: $2x - d(x, -2) = 3 \Leftrightarrow 2x - |x+2| = 3 \Leftrightarrow |x+2| = 2x-3$,
 οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, τότε έχουμε: $x+2 = 2x-3 \Leftrightarrow x = 5$.

Η οποία είναι δεκτή, αφού το $x \geq -2$.

(ii) Αν $x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$, τότε έχουμε: $-x-2 = 2x-3 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Η οποία απορρίπτεται, αφού πρέπει το $x < -2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $x^2 - 2|x| + 1 = 0$, (β) $|x|^3 - 4x^2 = 0$, (γ) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε: $x^2 - 2|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x|-1 = 0$
 $\Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$.

(β) Έχουμε: $|x|^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - 4|x|^2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 (|x|-4) = 0 \Leftrightarrow |x|=0 \text{ ή } |x|=4$
 $x=0 \text{ ή } x=4 \text{ ή } x=-4$.

(γ) Η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = 2x - 1 \Leftrightarrow |x-3| = 2x - 1$,

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, τότε έχουμε: $x-3 = 2x-1 \Leftrightarrow x = -2$.

Η οποία απορρίπτεται, αφού πρέπει το $x \geq 3$.

(ii) Αν $x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$, τότε έχουμε: $-x+3 = 2x-1 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

Η οποία είναι δεκτή, αφού το $x < 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

$$\begin{aligned}(\alpha) \frac{x}{6} - \frac{x-6}{3} &= 1 - \frac{x-8}{4} & (\beta) \frac{5+3x}{18} &= \frac{1}{3} - \frac{6x-2}{9} & (\gamma) 2x - \frac{3-2x}{6} &= 1 - \frac{5-x}{4} \\ (\delta) \frac{2x}{5} - \frac{x-3}{15} &= -1 - \frac{x+1}{10} & (\epsilon) x + \frac{3-x}{3} &= 1 + \frac{2x}{3} & (\sigma\tau) x - \frac{1-x}{2} &= 2x - \frac{2x-7}{4}\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(\alpha) (\lambda-1)x &= \lambda-1, & (\beta) \lambda(\lambda-1)x &= \lambda-1, & (\gamma) \lambda x - 3\lambda &= \lambda^2 - 3x, \\ (\delta) \lambda^2 x - 4\lambda &= 16x - \lambda^2, & (\epsilon) 4 - \lambda(\lambda-2x) &= -\lambda^2 x.\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Για τις διάφορες τιμές του λ , να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(\alpha) \lambda^2(x+1) &= -(-1-\lambda x), & (\beta) 2(\lambda^2+2x) - \lambda(4+\lambda x) &= 0, & (\gamma) \\ \lambda^2(\lambda x - \lambda + 2) - \lambda(x+1) &= 0, & (\delta) (\lambda^2 x - 2)(\lambda-2) + \lambda x - (\lambda-1)^2 &= 2.\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x+4) - 5\lambda(x+\lambda) = -25$, να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η παραπάνω εξίσωση είναι:

(α) ταυτότητα, (β) αδύνατη

Άσκηση 5

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(x+2\lambda) - 3(\lambda^2 - x - 3) = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η παραπάνω εξίσωση έχει:

(α) λύση το -3, (β) μοναδική λύση το -3

Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(x-5) = -2(\mu-x-2)$, να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ , η παραπάνω εξίσωση είναι:

(α) ταυτότητα, (β) αδύνατη

Άσκηση 7

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x - 6 - 2(2x - \beta) = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές των α και β , η παραπάνω εξίσωση έχει:

(α) έχει ακριβώς μια λύση, (β) είναι αδύνατη, (γ) είναι ταυτότητα, (δ) έχει τουλάχιστον μια λύση, (ε) έχει το πολύ μια λύση.

Άσκηση 8

$$\begin{aligned}(\alpha) x^3 - 9x &= 0, & (\beta) 2x(x^2 - 12) - 4(2x - 1) &= 4 \\ (\gamma) \frac{2x}{3x-6} - \frac{x}{2x-4} &= 1 + \frac{5x-12}{12-6x}, & (\delta) \frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} &= \frac{5}{x^2-4}.\end{aligned}$$

Άσκηση 9

$$(\alpha) \frac{|x|-1}{3} = 2, \quad (\beta) \frac{|x|+6}{2} = 3, \quad (\gamma) |2x+3| = 7, \quad (\delta) |7x-13| + 21 = 0.$$

Άσκηση 10

$$(\alpha) \frac{|x+3|}{2} = 5 - \frac{|x+3|}{3}, \quad (\beta) \frac{3|x-3|}{4} = 2 + \frac{|3-x|}{2}, \quad (\gamma) \frac{|x-2|}{2} = \frac{11}{20} - \frac{|6-3x|}{5},$$

$$(\delta) \frac{|x-3|}{2} + \frac{|6-2x|}{3} = 8 - \frac{|3-x|}{6}.$$

Άσκηση 11

$$(\alpha) |2x+1| = |x-4|, (\beta) \frac{|2x-1|}{3} = \frac{|3-x|}{2}, (\gamma) \frac{|x+1|}{4} - \frac{|3x-2|}{6} = 0,$$

$$(\delta) |x-2||x+2| = |7x-4|, (\epsilon) |x-4||x+3| = |x-2||x-6|.$$

Άσκηση 12

$$(\alpha) |x-3| = 2x-7, (\beta) |1-3x|-3 = 2x, (\gamma) x-2|x+2|-4 = 0, (\delta) |x^2-3x| + |x^2-9| = 0$$

$$(\epsilon) |x^2-2x-3| + |9-x^2| = 0, (\sigma\tau) d(3x, -1) = 5, (\zeta) x - d(2x, -6) = 4.$$

Άσκηση 13

$$(\alpha) \sqrt{x^2-4x+4} = 3, (\beta) \sqrt{4x^2-4x+1} - \sqrt{x^2-10x+25} = 0, (\gamma) \sqrt{x^2-10x+25} = 1-2x$$

$$(\delta) 5 + \sqrt{x^2-6x+9} = 3x.$$

Άσκηση 14

$$(\alpha) ||x|-3| = 1, (\beta) |5-|2x-1|| = 4, (\gamma) ||x-2|-x| = 3, (\delta) |x-|2x-6|| = |x-8|,$$

$$(\epsilon) ||x|-3|-5| = 1, (\sigma\tau) x + |x+3| - |4-x| = 0, (\zeta) 3 - |x+1| + |2-x| = 0,$$

$$(\eta) |x|-3|3-x| = 4x-9.$$

Άσκηση 15

$$(\alpha) \sqrt{x^2-6x+9} + 2\sqrt{x^2+2x+1} = 4, (\beta) |x| - \sqrt{x^2-4x+4} = 2,$$

$$(\gamma) \sqrt{x^2+8x+16} + \sqrt{x^2-4x+4} = 2(1+|x|).$$

Άσκηση 16

$$(\alpha) x^2 - 10|x| + 25 = 0, (\beta) x^2 - 8|x| = 0, (\gamma) |x|^3 - 6x^2 + 9|x| = 0,$$

$$(\delta) \frac{|2x-1|-3}{|x-2|-1} = 3, (\epsilon) \frac{4-|x-5|}{|3-2x|-1} = -4.$$