

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Να λυθεί η Εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

1^η Περίπτωση:

Αν η $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες

$$\text{τις } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{cases}$$

2^η Περίπτωση:

Αν η $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μια ρίζα διπλή πραγματική την

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

3^η Περίπτωση:

Αν η $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές δηλαδή είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) 2x^2 + x - 6 = 0 \quad (\beta) x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (\gamma) 2x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (\delta) x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$$

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε ότι $\alpha=2$, $\beta=1$ και $\gamma=-6$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49 > 0. \text{ Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες}$$

$$\text{άνισες τις } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+7}{4} \\ x_2 = \frac{-1-7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

(β) Έχουμε ότι $\alpha=1$, $\beta=-6$ και $\gamma=9$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0. \text{ Άρα η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή}$$

$$\text{πραγματική την } x = \frac{-\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{-6}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

(γ) Έχουμε ότι $\alpha=2$, $\beta=-5$ και $\gamma=4$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 - 36 = -7 < 0. \text{ Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.}$$

(δ) Έχουμε ότι $\alpha=1$, $\beta=-(\sqrt{3} + 1)$ και $\gamma=\sqrt{3}$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left[-(\sqrt{3} + 1)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2 > 0 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{3}+1 \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+1 \pm (\sqrt{3}-1)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{2} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \frac{2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $2x^2 + 8 = 0$ (β) $3x^2 + 12x = 0$ (γ) $x^2 - 5x = 0$ (δ) $x - 2(2-x)(x+2) = (x+3)^2 - 23$

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε $2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -4$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

(β) Παραγοντοποιούμε και έχουμε: $3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ή $x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -4$

(γ) Παραγοντοποιούμε και έχουμε: $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 5$

(δ) Κάνοντας πράξεις έχουμε:

$$x - 2(2-x)(x+2) = (x+3)^2 - 23 \Leftrightarrow x - 2(4-x^2) = x^2 + 6x + 9 - 23 \Leftrightarrow$$

$$x - 8 + 2x^2 = x^2 + 6x - 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} \\ x_2 = \frac{5-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Πλήθος Ριζών Παραμετρικής Εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $(\lambda+8)x^2 + (\lambda+2)x + \frac{\lambda}{4} = 0$ (1)

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω εξίσωση έχει $\alpha = \lambda+8$, $\beta = \lambda+2$ και $\gamma = \frac{\lambda}{4}$. Αφού η παραπάνω

εξίσωση είναι σε παραμετρική μορφή θα διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Αν $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda+8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -8$, η εξίσωση (1) γίνεται: $0x^2 + (-8+2)x + \frac{-8}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow -6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}. \text{ Άρα για } \lambda = -8, \text{ η εξίσωση είναι } 1^{\text{ου}} \text{ Βαθμού και έχει}$$

μοναδική λύση.

(β) Αν $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \lambda+8 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -8$, η εξίσωση (1) είναι $2^{\text{ου}}$ Βαθμού και για να βρούμε το πλήθος των ριζών της, πρέπει να βρούμε την διακρίνουσα της.

Έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda + 2)^2 - 4(\lambda + 8) \cdot \frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 - \lambda^2 - 8\lambda = 4 - 4\lambda$$

Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -4 \Leftrightarrow \lambda < 1$ και $\lambda \neq -8$, τότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(ii) Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα.

(iii) Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow -4\lambda < -4 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΘΕΩΡΙΑ 2

Έστω η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, αν οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, δηλαδή ισχύει: $\alpha\gamma < 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες. Πράγματι, αν ισχύει $\alpha\gamma < 0$, τότε είναι: $\beta^2 \geq 0$ και $\alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\alpha\gamma > 0$ άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $(\lambda^2 + 1)x^2 + (\lambda^5 - 2)x - |\lambda| - 3 = 0$

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω εξίσωση έχει $\alpha = \lambda^2 + 1$, $\beta = \lambda^5 - 2$ και $\gamma = -|\lambda| - 3 = -(|\lambda| + 3) < 0$.

Αφού οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, άρα η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 (Προσδιορισμός Παραμέτρου 1^η Περίπτωση)

Η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό 2.

(α) Να βρείτε το λ (β) Να βρείτε την άλλη ρίζα (αν υπάρχει) της εξίσωσης (1)

ΛΥΣΗ

(α) Αφού ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης (1), αυτό σημαίνει ότι επαληθεύει τον τύπο της. Άρα για $x = 2$ έχουμε:

$$\lambda \cdot 2^2 + (\lambda - 3) \cdot 2 + \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda - 6 + \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

(β) Για $\lambda = -2$, η εξίσωση (1) γίνεται: $-2x^2 + (-2 - 3)x + (-2)^2 - 2(-2) + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - 5x + 18 = 0. \text{ Η εξίσωση αυτή έχει } \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 18 = 169 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 \pm 13}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+13}{-4} \\ x_2 = \frac{5-13}{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Επομένως η άλλη ρίζα είναι: $x = -\frac{9}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 (Προσδιορισμός Παραμέτρου 2^η Περίπτωση)

Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση: $x^2 + (\mu + 1)x + \mu + 4 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα. Εν συνεχεία να βρείτε τη διπλή ρίζα.

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω εξίσωση έχει $\alpha = 1$, $\beta = \mu + 1$ και $\gamma = \mu + 4$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\mu + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\mu + 4) \Leftrightarrow \Delta = \mu^2 + 2\mu + 1 - 4\mu - 16$
 $\Leftrightarrow \Delta = \mu^2 - 2\mu - 15$. Για να έχει η εξίσωση μια διπλή ρίζα θα πρέπει $\Delta = 0$

$\Leftrightarrow \mu^2 - 2\mu - 15 = 0$. Η τελευταία εξίσωση είναι και αυτή 2^{ου} Βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta' = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) \Leftrightarrow \Delta = 4 + 60 = 64. \text{ Άρα έχει ρίζες}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = \frac{2+8}{2} \\ \mu_2 = \frac{2-8}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 5 \\ \mu_2 = -3 \end{cases}$$

(i) Για $\mu = 5$, η εξίσωση γίνεται $x^2 + 6x + 9 = 0$, που έχει μια διπλή ρίζα, τη

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{6}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = -3$$

(ii) Για $\mu = -3$, η εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0$, που έχει μια διπλή ρίζα, τη

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{-2}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 (Προσδιορισμός Παραμέτρου 3^η Περίπτωση)

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση: $(\lambda + 3)x^2 - 2(\lambda + 2)x + \lambda = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω εξίσωση έχει $\alpha = \lambda + 3$, $\beta = -2(\lambda + 2)$ και $\gamma = \lambda$.

Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες άνισες, πρέπει αρχικά να είναι 2^{ου} Βαθμού, δηλαδή πρέπει $\alpha \neq 0$ και επιπλέον πρέπει $\Delta > 0$. Συνεπώς, έχουμε:

$$(i) \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -3$$

$$(ii) \Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow [-2(\lambda + 2)]^2 - 4(\lambda + 3) \cdot \lambda > 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 4)^2 - 4\lambda(\lambda + 3) > 0 \\ \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 16\lambda + 16 - 4\lambda^2 - 12\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 16 > 0 \Leftrightarrow 4\lambda > -16 \Leftrightarrow \lambda > -4.$$

Τελικά η δοσμένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, όταν: $\lambda > -4$ και $\lambda \neq -3$

ΘΕΩΡΙΑ 3 (Άθροισμα και Γινόμενο Ριζών – Τύποι Vieta)

Έστω η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, $\Delta \geq 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της. Συμβολίζουμε με $S = x_1 + x_2$ το **άθροισμα των ριζών** και με $P = x_1 \cdot x_2$ το **γινόμενο των ριζών**, τότε

$$\text{αποδεικνύεται ότι ισχύει: } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως **τύποι του Vieta**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

$$(α) 2x^2 - 5x - 9 = 0 \quad (β) 3x^2 - 2x + 7 = 0$$

ΛΥΣΗ

(α) Η εξίσωση $2x^2 - 5x - 9 = 0$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) \Leftrightarrow \Delta = 25 + 72 = 97 > 0.$$

Άρα έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

- Το άθροισμα των ριζών είναι: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$
- Το γινόμενο των ριζών είναι: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{9}{2}$

(β) Η εξίσωση $3x^2 - 2x + 7 = 0$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 \Leftrightarrow \Delta = 4 - 84 = -80 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν έχει νόημα να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3x - 5 = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

(β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(i) $x_1 + x_2$ (ii) $x_1 \cdot x_2$ (iii) $x_1^2 + x_2^2$ (iv) $x_1^3 + x_2^3$ (v) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (vi) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

ΛΥΣΗ

(α) Η εξίσωση $x^2 + 3x - 5 = 0$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) \Leftrightarrow \Delta = 9 + 20 = 29 > 0.$$

Άρα έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

(β) (i) Η παράσταση $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{3}{1} = -3$

(ii) Η παράσταση $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{1} = -5$

Υπενθύμιση Ταυτοτήτων

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2)$

(iii) Η παράσταση $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-3)^2 - 2 \cdot (-5) = 9 + 10 = 19$

(iv) Η παράσταση $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2) = -3 \cdot [19 - (-5)] = -3 \cdot (19 + 5) = -3 \cdot 24 = -72$

(v) Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα, οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

(vi) Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα, οπότε έχουμε:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{19}{-5} = -\frac{19}{5}$$

ΘΕΩΡΙΑ 4 (Κατασκευή Εξίσωσης 2^{ου} Βαθμού, όταν γνωρίζουμε τις ρίζες της)

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της. Η εξίσωση 2^{ου} Βαθμού που έχει ρίζες x_1 και x_2 , με $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ είναι η: $x^2 - Sx + P = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} Βαθμού, η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς:.

(α) $x_1 = -2$ και $x_2 = 5$ (β) $x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ και $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

ΛΥΣΗ

(α) Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού με $x_1 = -2$ και $x_2 = 5$. Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών είναι:

- $S = x_1 + x_2 = -2 + 5 = 3$
- $P = x_1 \cdot x_2 = -2 \cdot 5 = -10$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

(β) Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού με $x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ και

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών είναι:

- $S = x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1+1-\sqrt{5}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5})}{16} = \frac{1-5}{16} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} Βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς: (α) $2x_1$ και $2x_2$ (β) $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

ΛΥΣΗ

(α) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$. Επομένως από τους τύπους του Vieta έχουμε:

- Το άθροισμα των ριζών είναι: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$
- Το γινόμενο των ριζών είναι: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{5}{1} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = -5$

Θέλουμε μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $2x_1$ και $2x_2$. Θα βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των αριθμών $2x_1$ και $2x_2$. Επομένως από τους τύπους του Vieta έχουμε:

- $S = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4$
- $P = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 = 4 \cdot (-5) = -20$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 20 = 0$

(β) Θέλουμε μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

Θα βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των αριθμών $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

Επομένως από τους τύπους του Vieta έχουμε:

- $S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$
- $P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x - 1 = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12 (Προσδιορισμός Παραμέτρου – 1^η Περίπτωση)

Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$ (1).

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

(β) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει:

(i) ρίζες αντίθετες (ii) ρίζες αντίστροφες

ΛΥΣΗ

(α) Η παραπάνω εξίσωση έχει $\alpha = 3$, $\beta = \lambda + 1$ και $\gamma = \lambda - 1$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda + 2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 12\lambda + 12 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 \geq 0$$

Ισχύει ότι $\Delta \geq 0$, άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Σχόλιο 1

Η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, έχει **αντίθετες ρίζες** όταν ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \text{ και } S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0$$

(β) (i) Η εξίσωση (1) έχει αντίθετες ρίζες x_1 και x_2 , όταν ισχύει: $x_1 + x_2 = 0$, δηλαδή:

$$S = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda + 2}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Σχόλιο 2

Η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, έχει **αντίστροφες ρίζες** όταν ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$$

(ii) Η εξίσωση (1) έχει αντίστροφες ρίζες x_1 και x_2 , όταν ισχύει: $x_1 \cdot x_2 = 1$, δηλαδή:

$$P = 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{3} = 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13 (Προσδιορισμός Παραμέτρου – 2^η Περίπτωση)

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , η εξίσωση:

$$x^2 + 4x + \lambda - 6 = 0$$
 (1)

(α) Έχει Ρίζες Ομόσημες (β) Έχει Ρίζες Ετερόσημες

ΛΥΣΗ

Η παραπάνω εξίσωση έχει $\alpha = 1$, $\beta = 4$ και $\gamma = \lambda - 6$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης

$$\text{είναι: } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 6) = 16 - 4\lambda + 24 = 40 - 4\lambda$$

Σχόλιο 1

Η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, έχει **ομόσημες ρίζες** όταν ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0$$

(α) Για να έχει η εξίσωση (1) ομόσημες ρίζες, πρέπει να ισχύουν:

$$\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \text{ και } \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow 40 - 4\lambda \geq 0 \text{ και } \lambda - 6 > 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 10 \text{ και } \lambda > 6 \\ \Leftrightarrow 6 < \lambda \leq 10$$

Σχόλιο 2

Η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, έχει **ετερόσημες ρίζες** όταν ισχύει: $P < 0$.

Σχόλιο 3

Όταν ισχύει: $P < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} < 0$, τότε οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, άρα η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ θα έχει σίγουρα πραγματικές ρίζες. Έτσι για να έχει μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού ετερόσημες ρίζες, αρκεί να ισχύει: $P < 0$.

(β) Για να έχει η εξίσωση (1) ετερόσημες ρίζες, πρέπει να ισχύει:

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 6}{1} < 0 \Leftrightarrow \lambda < 6$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14 (Προσδιορισμός Παραμέτρου – 3^η Περίπτωση)

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + (\lambda - 4)x - \lambda + 2 = 0$ (1)

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η εξίσωση (1) έχει:

(i) Θετικές Ρίζες (ii) Αρνητικές Ρίζες

ΛΥΣΗ

(α) Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda - 4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-\lambda + 2)$
 $= \lambda^2 - 8\lambda + 16 + 8\lambda - 16 = \lambda^2 \geq 0$. Ισχύει ότι $\Delta \geq 0$, άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Σχόλιο 1

Η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, έχει **θετικές ρίζες** όταν ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0 \text{ και } S > 0$$

(β) (i) Αφού ισχύει ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει θετικές ρίζες όταν: $P > 0$ και $S > 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ και $-\frac{\beta}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \frac{-\lambda + 2}{2} > 0$ και $-\frac{\lambda - 4}{2} > 0$
 $\lambda < 2$ και $\lambda < 4 \Leftrightarrow \lambda < 2$. Άρα η εξίσωση (1) έχει θετικές ρίζες, όταν $\lambda < 2$.

Σχόλιο 2

Η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, έχει **αρνητικές ρίζες** όταν ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0 \text{ και } S < 0$$

(ii) Αφού ισχύει ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει αρνητικές ρίζες όταν: $P > 0$ και $S < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ και $-\frac{\beta}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \frac{-\lambda + 2}{2} > 0$ και $-\frac{\lambda - 4}{2} < 0$
 $\lambda < 2$ και $\lambda > 4$. Που είναι αδύνατο. Άρα η εξίσωση (1) δεν έχει αρνητικές ρίζες για καμία τιμή του λ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15 (Προσδιορισμός Παραμέτρου – 4^η Περίπτωση)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ (1). Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες, από τις οποίες η μια είναι διπλάσια της άλλης.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 + \lambda + 2) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 8 = -4\lambda - 8$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες, όταν: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -2$

Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τις οποίες ισχύει: $x_2 = 2x_1$. Επομένως από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$\bullet \quad x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 + 2x_1 = -2\lambda \Leftrightarrow 3x_1 = -2\lambda \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2\lambda}{3} \quad (2)$$

$$\bullet \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot 2x_1 = \lambda^2 + \lambda + 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2 = \lambda^2 + \lambda + 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{4\lambda^2}{9} = \lambda^2 + \lambda + 2 \Leftrightarrow 8\lambda^2 = 9\lambda^2 + 9\lambda + 18 \Leftrightarrow \lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = -3$ ή $\lambda = -6$. Οι τιμές αυτές είναι και οι δύο αποδεκτές.

Το Τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$, έχει:

1. Δύο ρίζες ετερόσημες $\Leftrightarrow P < 0$
2. Δύο ρίζες θετικές $\Leftrightarrow P > 0, \Delta \geq 0, S > 0$
3. Δύο ρίζες αρνητικές $\Leftrightarrow P > 0, \Delta \geq 0, S < 0$
4. Δύο ρίζες θετικές και άνισες $\Leftrightarrow P > 0, \Delta > 0, S > 0$
5. Δύο ρίζες θετικές και ίσες $\Leftrightarrow \Delta = 0, S > 0$
6. Δύο ρίζες αρνητικές και ίσες $\Leftrightarrow \Delta = 0, S < 0$
7. Δύο ρίζες ετερόσημες με μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την θετική
 $\Leftrightarrow P < 0$ και $S > 0$
8. Δύο ρίζες ετερόσημες με μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την αρνητική
 $\Leftrightarrow P < 0$ και $S < 0$
9. Μια ρίζα το μηδέν $\Leftrightarrow P = 0$
10. Μια ρίζα θετική και η άλλη το μηδέν $\Leftrightarrow P = 0$ και $S > 0$
11. Μια ρίζα αρνητική και η άλλη το μηδέν $\Leftrightarrow P = 0$ και $S < 0$
12. Δύο ρίζες ίσες με μηδέν $\Leftrightarrow P = 0, \Delta = 0$
13. Δύο ρίζες αντίστροφες $\Leftrightarrow P = 1$ και $\Delta \geq 0$
14. Δύο ρίζες αντίθετες $\Leftrightarrow P < 0$ και $S = 0$
15. Δύο ρίζες ομόσημες $\Leftrightarrow \Delta \geq 0, P > 0$
16. Δύο ρίζες διαφορετικές και ομόσημες $\Leftrightarrow \Delta > 0, P > 0$
17. Δύο ρίζες ομόσημες και ίσες $\Leftrightarrow \Delta = 0, P > 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16 (Η ιδιότητα $|x|^2 = x^2$)

Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $2x^2 - |x| - 6 = 0$ (β) $(x-2)^2 - 4\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 3 = 0$

ΛΥΣΗ

(α) Από την ιδιότητα $|x|^2 = x^2$ έχουμε: $2x^2 - |x| - 6 = 0 \Leftrightarrow 2|x|^2 - |x| - 6 = 0$.

Θέτουμε $y = |x| \geq 0$, έτσι η αρχική εξίσωση γίνεται: $2y^2 - y - 6 = 0$, η οποία έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49$. Άρα έχει ρίζες

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Επειδή ισχύει $y = |x| \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η ρίζα $y = 2$.

Επομένως έχουμε: $y = 2 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$.

$$(\beta) (x-2)^2 - 4\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4\sqrt{(x-2)^2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4|x-2| + 3 = 0 \Leftrightarrow |(x-2)|^2 - 4|x-2| + 3 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $|x-2| = \omega \geq 0$ και η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = 3$

- Για $\omega = 1 \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x-2 = 1$ ή $x-2 = -1 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 1$
- Για $\omega = 3 \Leftrightarrow |x-2| = 3 \Leftrightarrow x-2 = 3$ ή $x-2 = -3 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17 (Διτετράγωνες Εξισώσεις)

Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (β) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

ΛΥΣΗ

(α) Η εξίσωση $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (1) είναι διτετράγωνη. Θέτουμε $x^2 = y \geq 0$, οπότε η (1) γίνεται: $(x^2)^2 - 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ Απορρίπτεται ή $y = 4$ Δεκτή

Επομένως $y = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$.

(β) Θέτουμε $x^3 = \omega$, οπότε έχουμε:

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3)^2 + 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 7\omega - 8 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -8$$

Επομένως $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18 (Κλασματική Εξίσωση)

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x}{x+2} - \frac{x-10}{x^2-4} = \frac{2}{x-2}$

ΛΥΣΗ

Αρχικά παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και έχουμε:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x-10}{x^2-4} = \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} - \frac{x-10}{(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x-2}$$

Πρέπει $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $(x+2)(x-2)$

Έτσι η αρχική γίνεται: $x(x-2) - (x-10) = 2(x+2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 10 = 2x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Απορρίπτεται, λόγω περιορισμών ή $x = 3$ Δεκτή

Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x = 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad x^2 + 3x = 0 \quad (\beta) \quad 2x^2 - 8x = 0 \quad (\gamma) \quad \sqrt{2}x^2 - \sqrt{8} \cdot x = 0 \quad (\delta) \quad x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0 \\ (\epsilon) \quad 2x^2 + (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0 \quad (\sigma\tau) \quad (x - 2)(x^2 + 5x + 4) = 0 \quad (\zeta) \quad (x^2 + 4x)(x^2 - 7x + 6) = 0\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad (x - 1)^2 = 4x - 5 \quad (2x + 1) = 0 \quad (\beta) \quad \frac{2x}{3} - \frac{10 - 3x}{4} = \frac{x^2}{6} \\ (\gamma) \quad \frac{2x + 3}{6} - \frac{(x + 1)(x - 1)}{3} = \frac{3 - x}{2} \quad (\delta) \quad \frac{4(1 - 7x)^2}{25} - \frac{3x(7x - 1)}{5} = 2x^2 + 10\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad |x^2 - 5x + 5| = 1 \quad (\beta) \quad |x^2 + 3x - 5| = |2x^2 - 4x + 5| \quad (\gamma) \quad |x - 3| = x^2 - x - 6 \\ (\delta) \quad x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta = 0 \quad (\epsilon) \quad 2x^2 + (\alpha - 2\beta)x - \alpha(\alpha + 2\beta) = 0\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad \lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2 = 0 \quad (\beta) \quad (\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0 \\ (\gamma) \quad (\lambda + 1)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0\end{aligned}$$

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε: $(\alpha) \quad \alpha x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 9\beta = 0$ με $\alpha \neq 0$,

$$(\beta) \quad x^2 + (2\alpha - \beta)x + \alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2 = 0$$

Άσκηση 6

Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

$$(\alpha) \quad \alpha x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta = 0, \text{ με } \alpha \neq 0 \quad (\beta) \quad \frac{1}{2}x^2 + (\alpha + 1)x + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

Άσκηση 7

Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του λ : $(\alpha) \quad x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$ $(\beta) \quad (\lambda - 3)x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$

Άσκηση 8

Αν η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει μια διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2 + (\mu + 1)x + \frac{\lambda^2}{4} = 0 \text{ έχει πραγματικές ρίζες}$$

Άσκηση 9

Η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ έχει ρίζα το -3. Να βρείτε:

$$(\alpha) \text{ τον αριθμό } \lambda \quad (\beta) \text{ την άλλη ρίζα της εξίσωσης}$$

Άσκηση 10

Η εξίσωση $x^2 - (4\lambda - 12)x + \lambda^2 - 12 = 0$ έχει ρίζα το 2. Να βρείτε:

$$(\alpha) \text{ τον αριθμό } \lambda \quad (\beta) \text{ Να αποδείξετε ότι το 2 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0$ με $\lambda \neq 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές

του λ η εξίσωση:

(α) έχει δύο ρίζες άνισες (β) έχει μια διπλή ρίζα (γ) Δεν έχει πραγματικές ρίζες

Άσκηση 12

Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 - x - 12 = 0$ (1) και $x^2 + (2\lambda - 9)x + \lambda^2 - 6\lambda = 0$ (2).

Η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι και ρίζα της εξίσωσης (2). Να βρείτε:

(α) το λ (β) τις ρίζες της εξίσωσης (2).

Άσκηση 13

Καθεμία από τις εξισώσεις: $x^2 + (\lambda - 2)x + 1 - 2\lambda = 0$ (1) και $x^2 - \lambda x + \lambda + 8 = 0$ (2).

Έχει μια διπλή ρίζα. (α) Να βρείτε το λ (β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

Άσκηση 14

Η εξίσωση: $(\lambda^3 + 10)x^2 + (2\lambda^3 + 4)x + \mu^2 + 4\mu + 22 = 0$ έχει διπλή ρίζα το 3.

Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .

Άσκηση 15

Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2 + (2\lambda + 1)x + |6 - 3\lambda| = 0$ (1)

(α) Να βρείτε το λ , αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα το -1.

(β) Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) θεωρούμε την εξίσωση: $x^2 - \lambda x + \mu^2 = 0$ (2). Να βρείτε το μ , ώστε η εξίσωση (2) να έχει διπλή ρίζα.

Άσκηση 16

Η εξίσωση: $(\lambda - 1)x^2 + \lambda^2 x - \lambda = 0$ (1) έχει δύο ρίζες άνισες, από τις οποίες η μια είναι η $x = 1$. (α) Να βρείτε το λ (β) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).

Άσκηση 17

Η εξίσωση: $2x^2 + 2(\alpha + \beta)x + (\alpha - 2)(\beta + 4) - 2 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα. Να βρείτε:

(α) τους αριθμούς α και β (β) τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

Άσκηση 18

Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων

(α) $x^2 + 3x - 2 = 0$ (β) $x^2 - 5x - 4 = 0$ (γ) $-x^2 - 3x - 1 = 0$ (δ) $2x^2 + 4x + 6 = 0$

(ε) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x - \sqrt{18} = 0$ (στ) $-\sqrt{3}x^2 - \sqrt{27}x + \sqrt{12} = 0$

Άσκηση 19

(α) Μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού έχει ρίζα το 4. Αν ισχύει $P = -4$, να βρείτε τον λόγο

$$-\frac{\beta}{\alpha}.$$

(β) Μια εξίσωση 2^{ου} Βαθμού έχει ρίζα το -2. Αν ισχύει $S = -3$, να βρείτε τον λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$

Άσκηση 20

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 8 = 0$ (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει: $x_1 + x_2 = 6$ και $x_1 x_2 = 4$.

(α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

(β) Να λύσετε την εξίσωση (1)

Άσκηση 21

Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 5x - 4 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν:

(α) $x_1 + x_2$ (β) $x_1 x_2$ (γ) $x_1^2 + x_2^2$ (δ) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ (ε) $(x_1 - x_2)^2$ (στ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Άσκηση 22

Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 4x + 2 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν:

(α) $x_1 + x_2$ (β) $x_1 x_2$ (γ) $x_1^2 + x_2^2$ (δ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ (ε) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$ (στ) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$

Άσκηση 23

Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + 7x - 9 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν:

(α) $x_1 + x_2$ (β) $x_1 x_2$ (γ) $x_1^2 + x_2^2$ (δ) $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ (ε) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ (στ) $|x_1 - x_2|$

Άσκηση 24

Να βρείτε εξίσωσης 2^{ου} Βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

(α) 2 και 4 (β) -6 και 1 (γ) $1 + \sqrt{2}$ και $1 - \sqrt{2}$
 (δ) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ και $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (ε) $\lambda - 2$ και $\lambda + 2$ (στ) μ και 2μ

Άσκηση 25

Έστω x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$, να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

(α) $2x_1$ και $2x_2$ (β) x_1^2 και x_2^2 (γ) $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ (δ) $\frac{x_1}{2}$ και $\frac{x_2}{2}$.

Άσκηση 26

Έστω x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x - 2 = 0$, να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

(α) $\frac{1}{x_1^2}$ και $\frac{1}{x_2^2}$ (β) $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$ (γ) $x_1^2 - x_1 x_2$ και $x_2^2 - x_1 x_2$ (δ) $\frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3}$ και $\frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3}$.

Άσκηση 27

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$ (1).

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

(β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες:

(i) αντίθετες (ii) αντίστροφες

Άσκηση 28

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση:

$x^2 - 6x - 3(2 - \lambda) = 0$ έχει ρίζες:

(α) ομόσημες (β) ετερόσημες

Άσκηση 29

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση: $x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ να έχει:

(α) μια διπλή ρίζα (β) δύο ρίζες ετερόσημες (γ) δύο ρίζες αρνητικές

(δ) δύο ρίζες θετικές (ε) δύο ρίζες αντίστροφες

Άσκηση 30

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η εξίσωση: $x^2 + (\lambda - 5)x - \lambda + 4 = 0$ να έχει:

- (α) μια διπλή ρίζα (β) δύο ρίζες αντίστροφες (γ) δύο ρίζες αντίθετες
(δ) δύο ρίζες ετερόσημες (ε) δύο ρίζες θετικές (στ) δύο ρίζες αρνητικές

Άσκηση 31

Δίνεται η επόμενη εξίσωση: $x^2 + 2x - \lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$ (1)

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ :
(i) Η εξίσωση (1) έχει αντίστροφες ρίζες
(ii) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) είναι τετραπλάσιο από το άθροισμα τους

Άσκηση 32

Δίνεται η επόμενη εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1)

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
(β) Να βρείτε το λ , ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι διπλάσια από την άλλη.

Άσκηση 33

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- (α) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ (β) $x^2 - 6|x| + 8 = 0$ (γ) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$ (δ) $x^2 + |4x| - 5 = 0$
(ε) $x^2 - |5x| + 6 = 0$ (στ) $x^2 + |-6x| - 40 = 0$

Άσκηση 34

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- (α) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (β) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ (γ) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$ (δ) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$
(ε) $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$ (στ) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

Άσκηση 35

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- (α) $(x+5)^2 - 2(x+5) - 3 = 0$ (β) $(x^2+1)^2 - 7(x^2+1) + 10 = 0$
(γ) $(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$ (δ) $(2x-1)^2 - 8|2x-1| + 15 = 0$

Άσκηση 36

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- (α) $\frac{6}{x+2} - \frac{4}{x+3} = 1$ (β) $\frac{4}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ (γ) $\frac{x-10}{x^2-4} - \frac{x}{2-x} = \frac{2}{x+2}$
(δ) $\frac{4x}{x^2-x} = \frac{4}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}$ (ε) $\frac{6}{x^2+2x} - \frac{x-1}{x^2-x} = 1$