

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Να λύσετε την ανίσωση: $\alpha x + \beta > 0$ για τις διάφορες τιμές των α και β .
Όμοια αντιμετωπίζεται η ανίσωση: $\alpha x + \beta < 0$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta > 0 - \beta \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$ (1)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η Περίπτωση:

Αν η $\alpha > 0$ τότε διαιρούμε τα μέλη της (1) με το α ,
(αφού $\alpha > 0$ η ανίσωση δεν αλλάζει φορά) και έχουμε:

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$$

2^η Περίπτωση:

Αν η $\alpha < 0$ τότε διαιρούμε τα μέλη της (1) με το α ,
(αφού $\alpha < 0$ η ανίσωση αλλάζει φορά) και έχουμε:

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$$

3^η Περίπτωση:

Αν η $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται: $0x > -\beta$ (2).

- Όταν $\beta > 0 \Leftrightarrow -\beta < 0$, τότε η (2) αληθεύει για κάθε τιμή του x .
- Όταν $\beta \leq 0 \Leftrightarrow -\beta \geq 0$, τότε η (2) είναι αδύνατη.

Το συμπέρασμα της παραπάνω διερεύνησης συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

$\alpha x + \beta > 0$		
$\alpha > 0$	$x > -\frac{\beta}{\alpha}$	
$\alpha < 0$	$x < -\frac{\beta}{\alpha}$	
$\alpha = 0$	$\beta \leq 0$	Αδύνατη
	$\beta > 0$	Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να λύσετε τις ανισώσεις:

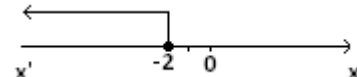
(α) $3(x-2) - 5(x+1) \geq 3 - 2(3-x)$ (β) $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{6} < 2 - \frac{4-x}{4}$

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε $3(x-2) - 5(x+1) \geq 3 - 2(3-x) \Leftrightarrow 3x - 6 - 5x - 5 \geq 3 - 6 + 2x$

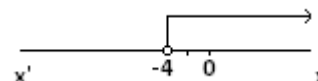
$\Leftrightarrow 3x - 5x - 2x \geq 3 - 6 + 6 + 5 \Leftrightarrow -4x \geq 8 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} \leq \frac{8}{-4} \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \in (-\infty, -2]$

Παριστάνουμε τις λύσεις της ανίσωσης σε άξονα ως εξής:



$$\begin{aligned}
 (\beta) \text{ Έχουμε } \frac{x}{3} - \frac{x-4}{6} &< 2 - \frac{4-x}{4} \stackrel{\text{Ε.Κ.Π.}(3,6,4)=12}{\Leftrightarrow} 12 \frac{x}{3} - 12 \frac{x-4}{6} < 12 \cdot 2 - 12 \frac{4-x}{4} \\
 &\Leftrightarrow 4x - 2(x-4) < 24 - 3(4-x) \Leftrightarrow 4x - 2x + 8 < 24 - 12 + 3x \Leftrightarrow 4x - 2x - 3x < 24 - 12 - 8 \\
 &\Leftrightarrow -x < 4 \Leftrightarrow \frac{-x}{-1} > \frac{4}{-1} \Leftrightarrow x > -4 \text{ ή } x \in (-4, +\infty)
 \end{aligned}$$

Παριστάνουμε τις λύσεις της ανίσωσης σε άξονα ως εξής:



ΘΕΩΡΙΑ 2(Ανισώσεις που ισχύουν για κάθε πραγματικό αριθμό)

Οι ανισώσεις που έχουν την παρακάτω μορφή ισχύουν για κάθε πραγματικό αριθμό

- (i) $0x < \beta$, για $\beta > 0$ (ii) $0x \leq \beta$, για $\beta > 0$ (iii) $0x > \beta$, για $\beta < 0$ (iv) $0x \geq \beta$, για $\beta < 0$
 (v) $0x \leq 0$ (vi) $0x \geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λύσετε την ανίσωση: $x + 3 - \frac{3x-5}{2} > 2 - \frac{x}{2}$

ΛΥΣΗ

Αρχικά κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε: $x + 3 - \frac{3x-5}{2} > 2 - \frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 - (3x - 5) > 4 - x \Leftrightarrow 2x + 6 - 3x + 5 > 4 - x \Leftrightarrow 2x - 3x + x > 4 - 6 - 5$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot x > -7. \text{ Οπότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

ΘΕΩΡΙΑ 3(Ανισώσεις που είναι αδύνατες)

Οι ανισώσεις που έχουν την παρακάτω μορφή είναι αδύνατες

- (i) $0x < \beta$, για $\beta < 0$ (ii) $0x \leq \beta$, για $\beta < 0$ (iii) $0x > \beta$, για $\beta > 0$ (iv) $0x \geq \beta$, για $\beta > 0$
 (v) $0x < 0$ (vi) $0x > 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x-3}{4} - \frac{x+5}{2} < -1 - \frac{10+x}{4}$

ΛΥΣΗ

Αρχικά κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε: $\frac{x-3}{4} - \frac{x+5}{2} < -1 - \frac{10+x}{4}$

$$\Leftrightarrow x - 3 - 2(x+5) < -4 - (10+x) \Leftrightarrow x - 3 - 2x - 10 < -4 - 10 - x \Leftrightarrow x - 2x + x < -4 - 10 + 3 + 10$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot x < -1. \text{ Επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$4 - 5(x-2) \geq 13 - 3(x+1) \text{ και } 1 - \frac{7-x}{4} > \frac{x}{2}$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά λύνουμε την 1^η Ανίσωση: $4 - 5(x-2) \geq 13 - 3(x+1) \Leftrightarrow 4 - 5x + 10 \geq 13 - 3x - 3$

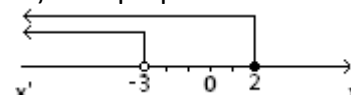
$$\Leftrightarrow -5x + 3x \geq 13 - 3 - 4 - 10 \Leftrightarrow -2x \geq -4 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \leq \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow x \leq 2$$

Λύνουμε την 2^η Ανίσωση: $1 - \frac{7-x}{4} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow 4 - (7-x) > 2x \Leftrightarrow 4 - 7 + x > 2x$

$$\Leftrightarrow x - 2x > 7 - 4 \Leftrightarrow -x > 3 \Leftrightarrow x < -3.$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:

Παρατηρούμε ότι οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $x < -3$ ή $x \in (-\infty, -3)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

(α) Να λύσετε την ανίσωση: $1 - 2(2x + 1) \leq 5 - 2x < 4 - \frac{8x - 7}{3}$.

(β) Ποιές είναι οι ακέραιες λύσεις τις παραπάνω ανίσωσης

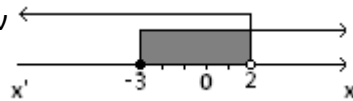
ΛΥΣΗ

(α) Λύνουμε ξεχωριστά τις ανισώσεις:

- $1 - 2(2x + 1) \leq 5 - 2x \Leftrightarrow 1 - 4x - 2 \leq 5 - 2x \Leftrightarrow -4x + 2x \leq 5 - 1 + 2 \Leftrightarrow -2x \leq 6$
 $\Leftrightarrow -\frac{2x}{-2} \geq \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x \geq -3$
- $5 - 2x < 4 - \frac{8x - 7}{3} \Leftrightarrow 15 - 6x < 12 - (8x - 7) \Leftrightarrow 15 - 6x < 12 - 8x + 7$
 $\Leftrightarrow -6x + 8x < 12 + 7 - 15 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$

Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:

Παρατηρούμε ότι οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $-3 \leq x < 2$ ή $x \in [-3, 2)$



(β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί: -3, -2, -1, 0, 1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 (Παραμετρική Ανίσωση)

Να λύσετε την ανίσωση: $2(\lambda - x) \leq \lambda x - \lambda(2x - \lambda)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$2(\lambda - x) \leq \lambda x - \lambda(2x - \lambda) \Leftrightarrow 2\lambda - 2x \leq \lambda x - 2\lambda x + \lambda^2 \Leftrightarrow -\lambda x + 2\lambda x - 2x \leq \lambda^2 - 2\lambda$$
$$\Leftrightarrow \lambda x - 2x \leq \lambda(\lambda - 2) \Leftrightarrow (\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \quad (1). \text{ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:}$$

1^η Περίπτωση:

Αν $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$ τότε: η (1) γίνεται:

$$(\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \stackrel{:(\lambda-2)>0}{\Leftrightarrow} \frac{(\lambda - 2)x}{(\lambda - 2)} \leq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)} \Leftrightarrow x \leq \lambda$$

2^η Περίπτωση:

Αν $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ τότε: η (1) γίνεται:

$$(\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \stackrel{:(\lambda-2)<0}{\Leftrightarrow} \frac{(\lambda - 2)x}{(\lambda - 2)} \geq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)} \Leftrightarrow x \geq \lambda.$$

3^η Περίπτωση:

Αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ τότε: η (1) γίνεται: $(2 - 2)x \leq 2 \cdot (2 - 2) \Leftrightarrow 0 \cdot x \leq 0$

Άρα η ανίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

ΘΕΩΡΙΑ 4

(1) Οι ανισώσεις της μορφής: $|A(x)| < \rho$ ή $|A(x)| \leq \rho$, όπου $\rho > 0$ λύνουμε ως εξής:

- $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$
- $|x| \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq x \leq \rho$

(2) Οι ανισώσεις της μορφής: $|A(x)| > \rho$ ή $|A(x)| \geq \rho$, όπου $\rho > 0$ λύνουμε ως εξής:

- $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$
- $|x| \geq \rho \Leftrightarrow x \leq -\rho \text{ ή } x \geq \rho$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να λυθούν οι ανισώσεις:

(α) $|x-4| < 2$ (β) $|2x-3| \leq 5$ (γ) $|3x+6| \leq 0$ (δ) $|x+7| < 0$ (ε) $|x-5| \leq -2$
(στ) $|1-2x| > 7$ (ζ) $|7x-13| \geq 0$ (η) $|4x-24| > 0$ (θ) $|21-4x| \geq -3$

ΛΥΣΗ

(α) $|x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \xrightarrow{+4} -2+4 < x < 2+4 \Leftrightarrow 2 < x < 6$
(β) $|2x-3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-3 \leq 5 \xrightarrow{+3} -5+3 \leq 2x \leq 5+3 \xrightarrow{:2} \frac{-2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$
(γ) $|3x+6| \leq 0 \Leftrightarrow |3x+6| = 0 \Leftrightarrow 3x+6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$
(δ) $|x+7| < 0$ είναι αδύνατη (ε) $|x-5| \leq -2$ είναι αδύνατη
(στ) $|1-2x| > 7 \Leftrightarrow 1-2x < -7 \text{ ή } 1-2x > 7 \Leftrightarrow -2x < -8 \text{ ή } -2x > 6 \Leftrightarrow x > 4 \text{ ή } x < -3$
(ζ) $|7x-13| \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
(η) $|4x-24| > 0 \Leftrightarrow |4x-24| \neq 0 \Leftrightarrow 4x-24 \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq 24 \Leftrightarrow x \neq 6$
(θ) $|21-4x| \geq -3$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 (Κοινές λύσεις ανισώσεων – Διπλή ανίσωση)

(α) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων: $|x-3| < 5$ και $|x-5| \geq 1$
(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $1 \leq |x-2| \leq 4$

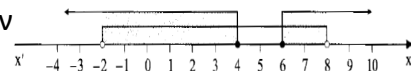
ΛΥΣΗ

(α) Λύνουμε ξεχωριστά τις ανισώσεις:

(1) $|x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-3 < 5 \xrightarrow{+3} -5+3 < x < 5+3 \Leftrightarrow -2 < x < 8$
(2) $|x-5| \geq 1 \Leftrightarrow x-5 \leq -1 \text{ ή } x-5 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 4 \text{ ή } x \geq 6$

Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:

Παρατηρούμε ότι οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $-2 < x \leq 4$ ή $6 \leq x < 8$



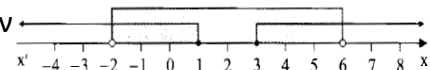
(β) Έχουμε $1 \leq |x-2| \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq |x-2|$ και $|x-2| \leq 4$

Λύνουμε ξεχωριστά τις ανισώσεις:

(1) $|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow x-2 \leq -1 \text{ ή } x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 3$
(2) $|x-2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 6$

Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:

Παρατηρούμε ότι οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $-2 < x \leq 1$ ή $3 \leq x < 6$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να λύσετε την ανίσωση: $|x-3| > 2x+1$

ΛΥΣΗ

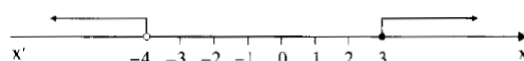
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ τότε:

$$|x-3| > 2x+1 \Leftrightarrow x-3 > 2x+1 \Leftrightarrow x-2x > 1+3 \Leftrightarrow -x > 4 \Leftrightarrow x < -4$$

Συναληθεύουμε με τον περιορισμό: $x \geq 3$

Άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

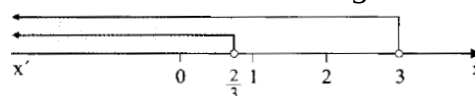


(2) Αν $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$ τότε:

$$|x - 3| > 2x + 1 \Leftrightarrow -x + 3 > 2x + 1 \Leftrightarrow -x - 2x > 1 - 3 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

Συναληθεύουμε με τον περιορισμό: $x < 3$

Άρα η ανίσωση ισχύει για $x < \frac{2}{3}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 2| \geq |x + 3|$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι και τα δύο μέλη είναι θετικά, οπότε υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$|x - 2| \geq |x + 3| \Leftrightarrow |x - 2|^2 \geq |x + 3|^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq (x + 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq x^2 + 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x - 6x \geq 9 - 4 \Leftrightarrow -10x \geq 5 \Leftrightarrow \frac{-10x}{-10} \leq \frac{5}{-10} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 3| - |2 - x| - 2x > 7$

ΛΥΣΗ

Αρχικά θα δημιουργήσουμε τον πίνακα προσήμων και έχουμε:

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
x+3	-	0	+	+
2-x	+	+	0	-

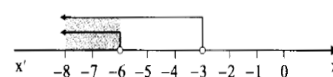
Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Αν $x \in (-\infty, -3)$ ή $x < -3$ τότε: $|x + 3| - |2 - x| - 2x > 7 \Leftrightarrow -(x + 3) - (2 - x) - 2x > 7$

$$\Leftrightarrow -x - 3 - 2 + x - 2x > 7 \Leftrightarrow -2x > 12 \Leftrightarrow x < -6.$$

Συναληθεύουμε τις λύσεις $x < -6$ με τον περιορισμό $x < -3$

Άρα οι λύσεις είναι για $x < -6$.



(2) Αν $x \in [-3, 2]$ ή $-3 \leq x \leq 2$ τότε: $|x + 3| - |2 - x| - 2x > 7 \Leftrightarrow x + 3 - (2 - x) - 2x > 7$

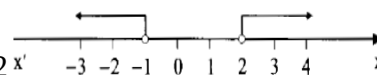
$$\Leftrightarrow x + 3 - 2 + x - 2x > 7 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 6. \text{ Άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.}$$

(3) Αν $x \in (2, +\infty)$ ή $x > 2$ τότε: $|x + 3| - |2 - x| - 2x > 7 \Leftrightarrow x + 3 + 2 - x - 2x > 7$

$$\Leftrightarrow -2x > 2 \Leftrightarrow x < -1.$$

Συναληθεύουμε τις λύσεις $x < -1$ με τον περιορισμό $x > 2$

Δεν υπάρχουν λύσεις στο διάστημα $x \in (2, +\infty)$.



Τελικά οι λύσεις της ανίσωσης είναι για $x < -6$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $2x-1 > 5$ (β) $2x-3 < 15-x$ (γ) $5-3x \leq 2x+5$ (δ) $3(2x+7)-4(15-x) \leq 29+12x$

(ε) $2(4x+5)-3(x+3) \leq -5x-9(1-x)$ (στ) $\frac{7-3x}{2} \geq 8$ (ζ) $-1-\frac{2x-7}{3} < \frac{2}{3}$

Άσκηση 2

Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

(α) $2-\frac{x-1}{3} \leq \frac{5}{6}$ (β) $3-\frac{x-2}{5} \geq \frac{4}{3}$ (γ) $\frac{2}{3}-\frac{5-7x}{6} > x-2$ (δ) $\frac{3x+1}{2}-\frac{2x-4}{3} < 1$

(ε) $1-\frac{3-x}{3} \geq \frac{19}{21}-\frac{1-x}{7}$ (στ) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-5}{4} > 1-\frac{4-x}{3}$ (ζ) $\frac{x+1}{3}-\frac{5x-16}{6} \geq \frac{x+8}{12}$

Άσκηση 3

Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις, να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους και να παρασταθούν οι λύσεις σε άξονα.

(α) $3x-5 > 4(x-1)-x$ (β) $4(x-6)-2(3-x) \leq 6(x-5)$

(γ) $3(x+4)-4(2x+1) > -5(x-2)$ (δ) $2(x+1) \geq 4-(x+3)-3(2-x)$

(ε) $2(x+2)+\frac{1}{6} < \frac{4x+9}{2}$ (στ) $\frac{17}{4}-\frac{15-x}{2} \leq x-\frac{x-3}{2}$ (ζ) $\frac{2}{5}-\frac{3-x}{2} < \frac{x-1}{10}-\frac{3-2x}{5}$

Άσκηση 4

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων που ακολουθούν και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν.

(α) $3(x-1)+2x < x+1$ και $2(x+3)-x \geq 2$ (β) $3x-2(1-x) > 2x+7$ και

$-5x \geq 12-2(7x-3)$ (γ) $5-3(x-1) > -4$ και $-2-(-x-1) \leq 1$ (δ) $2-\frac{1-3x}{2} \geq 0$ και

$\frac{x+2}{2} > \frac{4+3x}{5}$ (ε) $3-\frac{1-2x}{2} \geq \frac{1}{2}$ και $6-\frac{x+20}{7} \geq \frac{3x+30}{7}$

Άσκηση 5

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων που ακολουθούν και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν.

(α) $\frac{4x-3}{5}-x > \frac{6}{15}$ και $\frac{x}{4}-\frac{x}{2} \leq \frac{5}{4}$ (β) $\frac{2x+3}{4} > x-\frac{x+1}{2}$ και $2(x+4)-\frac{3x+15}{2} > 0$

(γ) $x+5 < 7$ και $2x \geq -6$ και $3x-1 \geq -4$ (δ) $\frac{3x+5}{2} > 4$ και $\frac{3-2x}{5} < 1$ και $\frac{6-x}{2} < 1$

Άσκηση 6

Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των παρακάτω ανισώσεων:

(α) $2x+3(x-1) \leq x+1$ και $2(x+3)-x > 2$ (β) $5(x-5)+4(x+1) < 6(1-3x)$ και

$3(x+2)-4(x-1) \geq 3(2-x)$ (γ) $\frac{x-1}{2}+\frac{2(x+1)}{3} \geq \frac{x+2}{2}-\frac{13}{6}$ και $\frac{2x-1}{4}+2x \leq \frac{x+1}{2}-\frac{11}{4}$

Άσκηση 7

Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

(α) $5 < 2x-1 < 9$ (β) $-3 \leq 2(x-5)+9 \leq 7$ (γ) $-5 \leq \frac{x+1}{3}-\frac{5}{6} \leq 2$

(δ) $3-5x \leq x+1 \leq 7x-5$ (ε) $\frac{4-2x}{3} \leq 2(x-1) < \frac{3x+2}{2}$ (στ) $\frac{x+5}{3} < \frac{5(x-3)}{6} < x-1$

Άσκηση 8

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

(α) $\lambda x + 6 \leq 3\lambda + 2x$ (β) $2(\lambda - x - 1) \geq (\lambda - 3)x$ (γ) $2 - (\lambda - 1)x > 3(x + 4)$

(δ) $\lambda(x - \lambda) < 3(x - 3)$ (ε) $\lambda(x - 4) \geq (\lambda - 2)(\lambda + 2) - 4(x - 1)$ (στ) $\frac{(\lambda - 2)x}{3} < 1 - \frac{x - 2}{3}$

(ζ) $\frac{\lambda x - \lambda}{3} \geq \frac{x - \lambda}{4} - \frac{x + 4}{6}$ (η) $\frac{(\lambda - 3)x}{6} \leq 1 - \frac{\lambda}{3}$

Άσκηση 9

Δίνεται η ανίσωση: $(\lambda + 3)x \geq 2(\mu - 2x) - 3(2 - 3x)$

Να βρείτε για ποιές τιμές των λ και μ η παραπάνω ανίσωση είναι αδύνατη.

Άσκηση 10

Δίνεται η ανίσωση: $\lambda(x - 2) \leq 3(\mu - x)$

Να βρείτε για ποιές τιμές των λ και μ η παραπάνω ανίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Άσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $|1 - x| \leq 3$ (β) $|4 - 2x| \leq 10$ (γ) $|x + 4| \geq 3$ (δ) $|1 - 2x| \geq 5$ (ε) $|5 - 2x| - 3 < 0$

(στ) $|6 - x| - 4 \leq 0$ (ζ) $|2x + 7| - 1 > 0$ (η) $|3 - x| - 2 \geq 0$

Άσκηση 12

Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $3 - \frac{|x - 1|}{3} \geq 1$ (β) $\frac{|1 - 2x| - 3}{2} \leq 4$ (γ) $\frac{7 - |x + 5|}{4} < 1$ (δ) $|7x + 3| > -1$ (ε) $|1 - 4x| < -2$

(στ) $|3 - 7x| \geq 0$ (ζ) $|2x - 6| \leq 0$ (η) $|3 - x| - 2 \geq 0$

Άσκηση 13

Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $\frac{15|x - 2| - 9}{2} \leq 8|x - 2| - 7$ (β) $\frac{3}{4} - \frac{4|7x + 3|}{3} > 2 + \frac{|7x + 3|}{8}$

(γ) $|x - 1| + |2x - 2| > |5x - 5| - 6$ (δ) $8 - |2x - 6| \leq \frac{|3 - x| - 4}{2}$

Άσκηση 14

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

(α) $|2x + 3| \leq 5$ και $|x + 1| > 1$ (β) $|3x - 6| > 9$ και $|x - 2| \leq 1$ (γ) $|5 - 2x| \leq 3$ και $|x - 3| \geq 1$

Άσκηση 15

Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $1 < |x + 5| < 3$ (β) $5 \leq |3x - 1| < 8$ (γ) $|6 - x| \leq 2x$ (δ) $4 - |x - 2| \geq 3x$

(ε) $3 - \frac{x - 3}{2} \leq |x + 2|$ (στ) $|x - 3| > |x + 2|$ (ζ) $|x - 1| \leq |x + 4|$ (η) $|x - 4| - |x + 1| > 0$

Άσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $|x| > x$ (β) $|x| \geq x$ (γ) $|x| > -x$ (δ) $|x| \leq x$ (ε) $\|x| - 3| < 2$ (στ) $|5 - |x|| > 3$

(ζ) $|2x - 1| > 3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|$ (η) $3|x - 1| - 2|x - 3| \geq 5$ (θ) $|x + 2| - |5 - x| \leq 2x$

Άσκηση 17

Να λύσετε την ανίσωση: $1 \leq \|x - 1| - 4| \leq 3$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο - ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ - 4.1
ΘΕΜΑ 2^ο

Άσκηση 1

Δίνεται οι ανισώσεις: $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$. Να βρείτε:

(α) Τις λύσεις τους, (β) Το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

Άσκηση 2

(α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 2$, (β) Να λύσετε την ανίσωση: $|2 - 3x| > 5$,

(γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Άσκηση 3

(α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$, (β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$,

(γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

Άσκηση 4

(α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: (i) $|2x - 3| \leq 5$, (ii) $|2x - 3| \geq 1$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Άσκηση 5

(α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: (i) $|1 - 2x| < 5$, (ii) $|1 - 2x| \geq 1$.

(β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Άσκηση 6

(α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \geq 5$, (β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

Άσκηση 7

(α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 4|$, (β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$

(γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) και λύσεις της ανισώσεως του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 8

(α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1),

(β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2),

(γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

Άσκηση 9

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

(α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$,

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$,

(β) Να απλοποιήσετε την επόμενη παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$.

Άσκηση 11

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση $|x+1| < 2$, να αποδείξετε ότι:

(α) $x \in (-3, 1)$, (β) Η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

Άσκηση 12

(α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| < 4$,

(β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Άσκηση 13

(α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 4| \geq 3$,

(β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση: $A = ||\alpha + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

Άσκηση 14

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $|2x - 1| < 1$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $0 < x < 1$,

(β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 4^ο

Άσκηση 1

- (α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-3| \leq 5$,
- (β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης: $|x-3|$.
- (γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3| \leq 5$.
- (δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3| \leq 5$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 2

- (α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει: $|x-4| < 2$.
- (β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόσταση του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.
- (i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.
- (ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων περιέρχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.
- (β) Έστω $\lambda \neq 0$.
- (i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.
- (ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει: $|x_1 - x_2| > 1$.