ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

(α) $x=2$ ή $x=4$ ή $x=-1$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
x^2-3x-4	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	
$P(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

(β) $P(x)=(4-x)(x^2-9)$

x	$-\infty$	-3	3	4	$+\infty$
$4-x$	$+$	$+$	$+$	0 $-$	
x^2-9	$+$	0 $-$	0 $+$	$+$	
ΓΙΝ	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	

(γ) $P(x)=(x-5)(x^2+4x+4)$

x		-2	5	
$x-5$	$-$	$-$	0 $+$	
x^2+4x+4	$+$	0 $+$	$+$	
$P(x)$	$-$	0 $-$	0 $+$	

(δ) $P(x)=(x^2-9)(x^2-4x-5)$ $\quad x=\pm 3$ $\quad x=5$, $x=-1$

x	$-\infty$	-3	-1	3	5	$+\infty$
x^2-9	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	$+$	
x^2-4x-5	$+$	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	
$P(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

(ε) $P(x) = (x^2-1)(-x^2+2x+3)$ $\Delta = 4+12 = 4^2$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
x^2-1	$+$	$\oplus$	$-$	$\oplus$	$+$		$+$		
$-x^2+2x+3$	$-$	$\oplus$	$+$		$+$	$\oplus$	$-$		
$P(x)$	$-$	$\oplus$	$-$	$\oplus$	$+$	$\oplus$	$-$		

(στ) $P(x) = (x^2+2x+4)(-x^2+2x+15)$

$\Delta_1 = 4-16 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 4+60 = 8^2$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{-2} \begin{cases} -3 \\ 5 \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
x^2+2x+4	$+$		$+$		$+$		
$-x^2+2x+15$	$-$	$\oplus$	$+$	$\oplus$	$-$		
$P(x)$	$-$	$\oplus$	$+$	$\oplus$	$-$		

Άσκηση 2

(α) $(x-2)(x^2+2x-3) > 0$ $x=2$, $x=-3$, $x=1$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	$\oplus$	$+$		
x^2+2x-3	$+$	$\oplus$	$-$	$\oplus$	$+$		$+$		
ΓΙΝ	$-$	$\oplus$	$+$	$\oplus$	$-$	$\oplus$	$+$		

$x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$

(Β) $(x-3)(x^2-4x+3) \leq 0$ $x=3$, $x=1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	$\oplus$	$+$		
x^2-4x+3	$+$	$\oplus$	$-$	$\oplus$	$+$		
ΓΙΝ	$-$	$\oplus$	$+$	$\oplus$	$+$		

$x \in (-\infty, 1] \cup \{3\}$

(γ) $(x^2+3x-4)(x^2-3x+2) < 0$

$x_1 = -4,\ x_2 = +1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1$

x	$-\infty$	-4		1	2	$+\infty$
x^2+3x-4	+	0	−	0	+	+
x^2-3x+2	+	+	+	0	−	0 +
ΓΙΝ	+	0	−	0	−	0 +

$x \in (-4, 1) \cup (1, 2)$

(δ) $(1-x)(x^2-3x+2) > 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$1-x$	+	0	−	−	
x^2-3x+2	+	0	−	0	+
ΓΙΝ	+	0	+	0	−

$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$

(ε) $x(x^2-x-6)(x^2-x+2) < 0$

$\Delta_1 = 1+24$ $\qquad \Delta_2 = 1-8 < 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ < 3, −2

x	$-\infty$	-2		0	3	$+\infty$
x	−	0	−	0	+	+
x^2-x-6	+	0	−	0	−	0 +
x^2-x+2	+	+	+	+	+	+
ΓΙΝ	−	0	+	0	−	0 +

$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 3)$

(στ) $(-x^2+8x-12)(x^2+x-20)(4-x) \geq 0$

$\Delta = 64-48 = 16$ $\qquad \Delta = 1+80$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{-2}$ < 2, 6

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$ < 4, −5

x	-5		2		4		6
$-x^2+8x-12$	−	0	−	0	+	0	−
x^2+x-20	+	0	−	0	+	+	+
$4-x$	+	+	+	+	0	−	−
ΓΙΝ	−	0	+	0	+	0	−

$x \in [-5, 2] \cup [6, +\infty) \cup \{4\}$

(J) $x^2(9-x^2)(2-x) > 0$

x	-3	0	2	3
x^2	+	+ 0 +	+	+
$9-x^2$	− 0 +	+	+ 0	−
$2-x$	+	+	+ 0 −	−
ΓΙΝ	− 0	+ 0 +	0 −	0 +

$x \in (-3,0) \cup (0,2) \cup (3,+\infty)$

Άσκηση 3

(α) $(x-2)^4(x+1)^3(x^2-4) \geq 0$

x	-2	-1	2
$(x-2)^4$	+	+	+ 0 +
$(x+1)^6$	+	+ 0 +	+
x^2-4	+ 0 −	− 0	+
ΓΙΝ	+ 0	− 0 −	0 +

$x \in (-\infty,-2] \cup \{-1\} \cup [2,+\infty)$

(Β) $(x-1)^5(x-2)^4(x-3)^3 \leq 0$

x	1	2	3
$(x-1)^5$	− 0 +	+	+
$(x-2)^4$	+	+ 0 +	+
$(x-3)^3$	−	−	− 0 +
ΓΙΝ	+ 0	− 0 −	0 +

$x \in [1,3]$

(γ) $x^3+4x^2-12x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2+4x-12) \geq 0$

$\Delta = 16+48 = 64$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$

x	$-\infty$	-6	0	2	$+\infty$
x	−		− 0 +		+
$x^2+4x-12$	+ 0	−		− 0	+
ΓΙΝ	− 0	+ 0		− 0	+

$x \in [-6,0] \cup [2,+\infty)$

(δ) $x^3+3x^2<4x+12 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4x-12<0$

$\Leftrightarrow x^2(x+3)-4(x+3)<0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-4)<0$

x	$-\infty$	-3	-2	2	$+\infty$
$x+3$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
x^2-4	$+$	$+$ 0	$-$	0 $+$	
ΓΙΝ	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

$x \in (-\infty,-3) \cup (-2,2)$

(ε) $x^4>8x \Leftrightarrow x(x^3-2^3)>0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+4)>0$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	$-$	0 $+$	$+$	
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$	
x^2+2x+4	$+$	$+$	$+$	
ΓΙΝ	$+$	0 $-$	0 $+$	

$x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

(στ) $x(x^4-5x^2+4) \geq 0$ Θέτω $\omega = x^2$ $\omega^2-5\omega+4$

$\Delta = 25-16 = 3^2$ $\omega_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ → 4, 1

$\Leftrightarrow x(x^2-4)(x^2-1) \geq 0$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
x^2-4	$+$	0 $-$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	
x^2-1	$+$	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	$+$	
ΓΙΝ	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

$x \in (-\infty,-2) \cup (-1,0) \cup (1,2)$

Άσκηση 4

$(x+2)(x^2-4x) \leq 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-4) \leq 0$

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
x	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$x+2$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	
ΓΙΝ	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

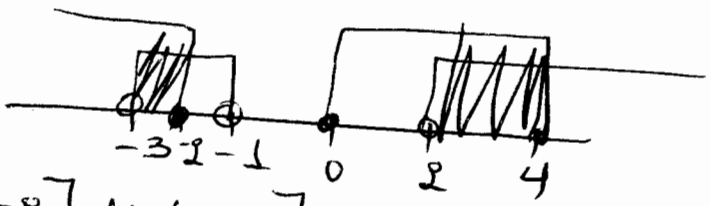
$x \in (-\infty,-2] \cup [0,4]$

Και $(x-2)(x^2+4x+3)>0$ $\Delta = 16-12 = 2^2$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$ $\begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$
x^2+4x+3	$+$	0 $-$	0 $+$	$+$	$+$
ΓΙΝ	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

$x \in (-3,-1) \cup (2,+\infty)$



Τελικά $x \in (-3,-2] \cup (2,4]$

Άσκηση 5

$(x-2)(x^2+2x-15) \geq 0$ $\Delta = 4+60$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$ $\begin{matrix} 3 \\ -5 \end{matrix}$

x	$-\infty$	-5	2	3	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$
$x^2+2x-15$	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	$+$
ΓΙΝ	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

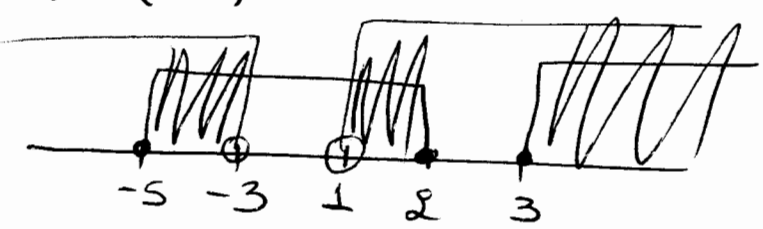
$x \in [-5,2] \cup [3,+\infty)$

Και $(x^3-1)(5x^2-x+4)(x+3)>0$ $\Delta = 1-80<0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)(5x^2-x+4)(x+3)>0$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0 $+$	$+$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$
$5x^2-x+4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	0 $+$	$+$	$+$
ΓΙΝ	$+$	0 $-$	0 $+$	

$x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$



Τελικά: $x \in [-5,-3) \cup (1,2] \cup [3,+\infty)$

Άσκηση 6

(α) $\frac{3}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow 3(x+4) \geq 0$

x		-4	
$x+4$	$-$	0	$+$

$x \in (-4, +\infty)$

(β) $\frac{x-2}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4) \geq 0$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
ΠΝ		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in (-\infty, -4) \cup [2, +\infty)$

(γ) $\frac{x+3}{6-x} \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(6-x) \geq 0$

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$6-x$		$+$		$+$	0	$-$	
ΓΙΝ		$-$	0	$+$	0	$-$	

$x \in [-3, 6)$

(δ) $\frac{x-3}{x^2+4x-5} < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x-5) < 0$

$\Delta = 16 + 20 = 6^2 \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -5 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-5		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
ΓΙΝ		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in (-\infty, -5) \cup (1, 3)$

(ε) $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-2x-3)(x-2) \geq 0$

$\Delta = 4 + 12 = 4^2 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
ΓΙΝ		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in [-1, 2) \cup [3, +\infty)$

(στ) $(-x^2+3x+4)(x^2-1) \leq 0 \quad \Delta = 9 + 16 = 5^2 \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 4 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
ΓΙΝ		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (4, +\infty)$

Άσκηση 7

(α) $\frac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2+x+1)(3x-5)(3x+5)$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$		$+$	
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$		$+$		
$9x^2-25$	$+$	0	$-$		$-$		0	$+$	
FIN	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$		

$x \in \left(-\frac{5}{3}, 0\right] \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$

(β) $\frac{x^2-4x-2}{x^2-9} > 0 \Leftrightarrow (x^2-4x-2)(x^2-9) > 0$

$\Delta = 24 = (2\sqrt{6})^2$, $x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$ → $2+\sqrt{6}$, $2-\sqrt{6}$

x	$-\infty$		-3		$2-\sqrt{6}$		3		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-4x-2	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
FIN	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$		

$x \in (-\infty, -3) \cup (2-\sqrt{6}, 3) \cup (2+\sqrt{6}, +\infty)$

(γ) $\frac{(x^2+3x+2)(x+3)}{(2x-1)(-x^2-x+12)} \leq 0$

$\Delta = 1$, $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$ → -1, -2

$\Delta = 1 + 48$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{-2}$ → -4, 3

$\Leftrightarrow$

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
x^2+3x+2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		
$2x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$-x^2-x+12$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		
FIN	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	‖	$-$		$+$	‖	$-$

$x \in (-\infty, -4) \cup [-3, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$

(δ) $(x-2)(9-x^2)(x^2+2x-3) \geq 0$ $\Delta = 4+12 = 4^2$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ → 1, -3

x	$-\infty$		-3		1		2		3		$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$9-x^2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
FIN	$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$		

$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup [2, 3]$

(ε) $\frac{(x^2-1)(-x^2+x+6)}{x^2-2x-8} \le 0$ $\Delta = 1+24 = 5^2$ $x_{1,2} = \frac{-1\pm5}{-2} \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$

$\Delta = 4+32 = 6^2$ $x_{1,2} = \frac{2\pm6}{2} \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	
x^2-1	+	+	0 −	0 +	+	+	
$-x^2+x+6$	−	0	+	+	+	0 −	−
x^2-2x-8	+	0	−	−	−	−	0 +
ΠΙΝ	−	‖ −	0	+	0 −	‖ +	−

$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup [1, 3] \cup (4, +\infty)$

(στ) $\frac{x(x^2+3x-10)}{-x^2+4x-4} \ge 0 \Leftrightarrow x(x^2+3x-10)(-x^2+4x-4) \ge 0$

$\Delta = 9+40 = 7^2$ $x_{1,2} = \frac{-3\pm7}{2} \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$ $\Delta = 16-16 = 0$ $x = \frac{-4}{-2} = 2$

x	$-\infty$	-5	0	2	$+\infty$
x	−	−	0 +	+	+
$x^2+3x-10$	+	0 −	−	0	+
$-x^2+4x-4$	−	−	−	0	−
ΠΙΝ	+	0 −	0 +	‖	−

$x \in (-\infty, -5] \cup [0, 2)$

Άσκηση 8

(α) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{2(x+2)}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-2(x+2)}{x+2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-1-2x-4}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) \ge 0$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$x-5$	−	−	0 +	
$x+2$	−	0 +	+	
ΠΙΝ	+	‖ −	0	+

$x \in (-\infty, -2) \cup [5, +\infty)$

(β) $\frac{4x}{x(3-x)} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{8x}{2x(3-x)} \ge \frac{x(3-x)}{2x(3-x)} \Leftrightarrow \frac{8x-x(3-x)}{2x(3-x)} \ge 0$

ΕΚΠ $= 2x(3-x)$ Με $x \neq 0$ και $x \neq 3$

$\Leftrightarrow (8x-3x+x^2)[2x(3-x)] \ge 0 \Leftrightarrow (x^2+5x)[2x(3-x)] \ge 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(x+5)(x-3) \le 0$

x	$-\infty$	-5	0	3	$+\infty$
x^2	+	+ 0	+	+	
$x+5$	− 0	+	+	+	
$x-3$	−	−	− 0	+	
FIN	+ 0	− ‖	− ‖	+	

$x \in [-5, 0) \cup (0, 3)$

(γ) $\frac{x+8}{2x+1} \geq x \Leftrightarrow \frac{x+8}{2x+1} - \frac{x(2x+1)}{2x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+8-2x^2-x}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-8}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-4)}{2x+1} \leq 0$

$x \neq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(x^2-4)(2x+1) \leq 0$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
x^2-4	+ 0	−	−	0 +	
$2x+1$	−	− 0	+	+	
FIN	− 0	+ ‖	−	0 +	

$x \in (-\infty, -2] \cup (-\frac{1}{2}, 2]$

(δ) $\frac{x}{x+3} + \frac{3}{x} \leq \frac{13}{x^2+3x} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(x+3)} + \frac{3(x+3)}{x(x+3)} \leq \frac{13}{x(x+3)}$

ΕΧΠ: $x(x+3)$ $x \neq 0$ και $x \neq -3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+3(x+3)-13}{x(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x+9-13) \times (x+3) \leq 0$

$\Leftrightarrow x(x^2+3x-4)(x+3) \leq 0$ $\quad x=0,\ x=-4,\ x=1,\ x=-3$

x	$-\infty$	-4	-3	0	1	$+\infty$
x	−	−	− 0	+	+	
x^2+3x-4	+ 0	−	−	− 0	+	
$x+3$	−	− 0	+	+	+	
FIN	+ 0	− ‖	+ ‖	− 0	+	

$x \in [-4, -3) \cup (0, 1]$

(ε) $\frac{3}{x+1} - \frac{x-1}{x-4} > \frac{3}{2}$ (=)

ΕΚΠ $= 2(x+1)(x-4)$ με $x \neq -1$ και $x \neq 4$

(=) $\frac{3\cdot 2(x-4) - 2(x-1)(x+1) - 3\cdot(x+1)(x-4)}{2(x+1)(x-4)} > 0$

(=) $\frac{6x - 24 - 2(x^2-1) - 3(x^2-4x+x-4)}{2(x+1)(x-4)} > 0$

(=) $\frac{6x-24-2x^2+2-3x^2+9x+12}{2(x+1)(x-4)} > 0$

(=) $\frac{-5x^2+15x-10}{2(x+1)(x-4)} > 0$ (=) $\frac{-5(x^2-3x+2)}{2(x+1)(x-4)} > 0$

$x=1$ ή $x=2$ ή $x=-1$ ή $x=4$

x	$-\infty$	-1	1	2	4	$+\infty$
$-5x^2+15x-10$	$-$	$-$	0 $+$	0 $-$		$-$
$x+1$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$
ΠΙΝ	$-$	‖ $+$	0 $+$	0 $-$	‖ $+$	$-$

$x \in (-1, 1] \cup [2, 4)$

(σε) $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} \leq 2$ $x \neq 1$ και $x \neq -\frac{1}{3}$

ΕΚΠ $= (x-1)(3x+1)$

(=) $\frac{2x(3x+1) + (x-1)(3x-1) - 2(x-1)(3x+1)}{(x-1)(3x+1)} \leq 0$

(=) $\frac{6x^2+2x+3x^2-x-3x+1-2(3x^2+x-3x-1)}{(x-1)(3x+1)} \leq 0$

(=) $\frac{\cancel{6x^2}+2x+3x^2\cancel{-x}\cancel{-3x}+1\cancel{-6x^2}+\cancel{4x}+2}{(x-1)(3x+1)} \leq 0$

(=) $\frac{3x^2+2x+3}{(x-1)(3x+1)} \leq 0$ $\Delta = 4 - 3\cdot 3\cdot 3 < 0$

x	$+\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\infty$
$3x^2+2x+3$	+	+	+	
$x-1$	−	−	0	+
$3x+1$	−	0	+	+
ΓΙΝ	+	‖ −	‖	+

$x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

(J) $\frac{x+1}{x-1} - 2 < \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-2x(x-1)-(x-1)(1-x)}{x(x-1)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2x^2+2x+x^2-2x+1}{x(x-1)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x-1)} < 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) < 0$ $\quad x \neq 0$ και $x \neq 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	−	−	0	+	+
$x-1$	−	−	−	0	+
$x+1$	−	0	+	+	+
ΓΙΝ	−	0	+ ‖	− ‖	+

$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Άσκηση 9

$\frac{-x^2+5x+6}{x^2+x-6} \geq 0$

$\Delta = 25+24 = 7^2$ $\quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} \begin{cases} -1 \\ +6 \end{cases}$

$\Delta = 1+24 = 5^2$ $\quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

$x \neq 2$ και $x \neq -3$

x	$-\infty$	-3	-1	2	6	$+\infty$
$-x^2+5x+6$	−	‖	−	0 +	+ 0	−
x^2+x-6	+	0 −	‖ −	0	+	+
ΓΙΝ	−	‖	+ 0	− ‖	+ 0	−

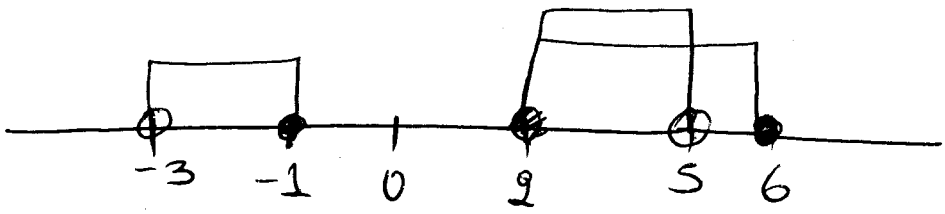
$x \in (-3, -1] \cup (2, 6]$

$$\frac{3}{5-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-(5-x)}{5-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-5+x}{5-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-5} \leq 0$$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$		
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$		
ΓΙΝ	$+$	0	$-$	‖	$+$		

$x \in [2,5)$



Τελικά $x \in (2,5)$

Άσκηση 10

(α) $(|x|-2)(x^2-2x-3) \geq 0 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$
$x=3$ $x=-1$

x	$-\infty$		-2		-1		2		3	
$\|x\|-2$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x-3	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
ΓΙΝ	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in (-\infty,-2] \cup [-1,2] \cup [3,+\infty)$

(β) $(|x|-4)(x^2+2x-8) \leq 0$ $x=4$ ή $x=-4$
$\Delta = 4+32 = 6^2$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$ $\begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-4		2		4		$+\infty$
$\|x\|-4$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
x^2+2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		
ΓΙΝ	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

$x \in [2,4] \cup \{-4\}$

Άσκηση 11

$(\lambda-2)x^2-3x+(\lambda^2-3\lambda-4)=0$

Πρέπει $\alpha\beta<0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda-4)<0$ $\quad \lambda=4 \,\dot{\eta}\, \lambda=-1$

λ	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$\lambda-2$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$\lambda^2-3\lambda-4$	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	
ΓΙΝ	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

$\lambda \in (-\infty,-1)\cup(2,4)$

Άσκηση 12

$(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$

- $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4(a+1)^2-4(a-1)(a-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow 4(a^2+2a+1)-4(a^2-2a-a+2)\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2+2a+1-a^2+3a-2\geq 0 \Leftrightarrow 5a\geq 1 \Leftrightarrow a\geq \frac{1}{5}$

- $S<0 \Leftrightarrow \frac{-2(a+1)}{a-1}<0 \Leftrightarrow -2(a+1)(a-1)<0$

$\Leftrightarrow 2(a+1)(a-1)>0$ με $a\neq 1$

a	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$a+1$	$-$	0 $+$	$+$	
$a-1$	$-$	$-$	0 $+$	
ΓΙΝ	$+$	0 $-$	$\|\|$	$+$

$a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

- $P>0 \Leftrightarrow \frac{a-2}{a-1}>0 \Leftrightarrow (a-2)(a-1)>0$ με $a\neq 1$

$\Leftrightarrow a^2-a-2a+2>0 \Leftrightarrow a^2-3a+2>0$

a	$-\infty$	1	2	$+\infty$
a^2-3a+2	$+$	0 $-$	0 $+$	

$\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

Τελικά $\boxed{a\in(2,+\infty)}$

Άσκηση 13

$(\lambda-2)x^2-2\lambda x+\lambda+3=0$, έχει θετικές ρίζες

- $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-4(\lambda-2)(\lambda+3)\geq 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2-4(\lambda^2+3\lambda-2\lambda-6)\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-(\lambda^2+\lambda-6)\geq 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda^2-\lambda+6\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda\leq 6}$

- $S>0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda}{\lambda-2}>0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda-2)>0$ $\quad \lambda=0$ ή $\lambda=2$

$\Leftrightarrow 2\lambda^2-4\lambda>0$

λ	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2\lambda^2-4\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

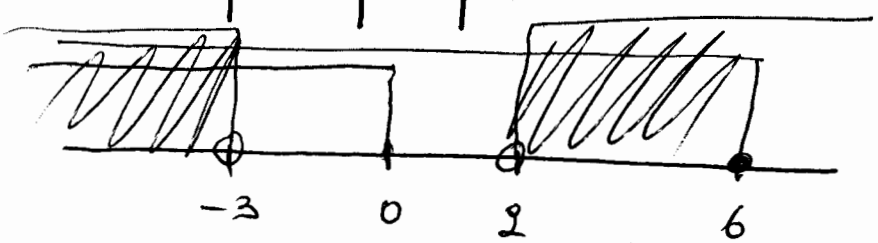
$\lambda\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

- $P>0 \Leftrightarrow \frac{\lambda+3}{\lambda-2}>0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda-2)>0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+3\lambda-6>0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-6>0$

λ	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$\lambda^2+\lambda-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lambda\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$



$\lambda\in(-\infty,-3)\cup(2,6]$

Άσκηση 14

$(\lambda-1)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1$

(α) $\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda-1)(\lambda+1)$

$\Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 + \lambda - \lambda - 1) \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 1 = 1 > 0$

άρα $\Delta > 0$ και η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

(Β) $x_1^2 x_2 + x_1 \cdot x_2^2 \geq 0 \quad x_1 + x_2 = \frac{2\lambda}{\lambda-1}$

$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) \geq 0 \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2} \geq 0$ με $\lambda \neq 1$

$\Leftrightarrow 2\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \geq 0$

λ	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
λ		$-$	$-$	Φ	$+$		$+$		
$\lambda+1$		$-$	Φ	$+$	$+$		$+$		
$(\lambda-1)^2$		$+$	$+$		$+$	Φ	$+$		
ΓΙΝ		$+$	Φ	$-$	$+$	$\nexists$	$+$		

$\lambda \in (-\infty, -1] \cup [0, 1) \cup (1, +\infty)$